Jak otrzymać chaos?

Tomasz MAŁOLEPSZY[*]

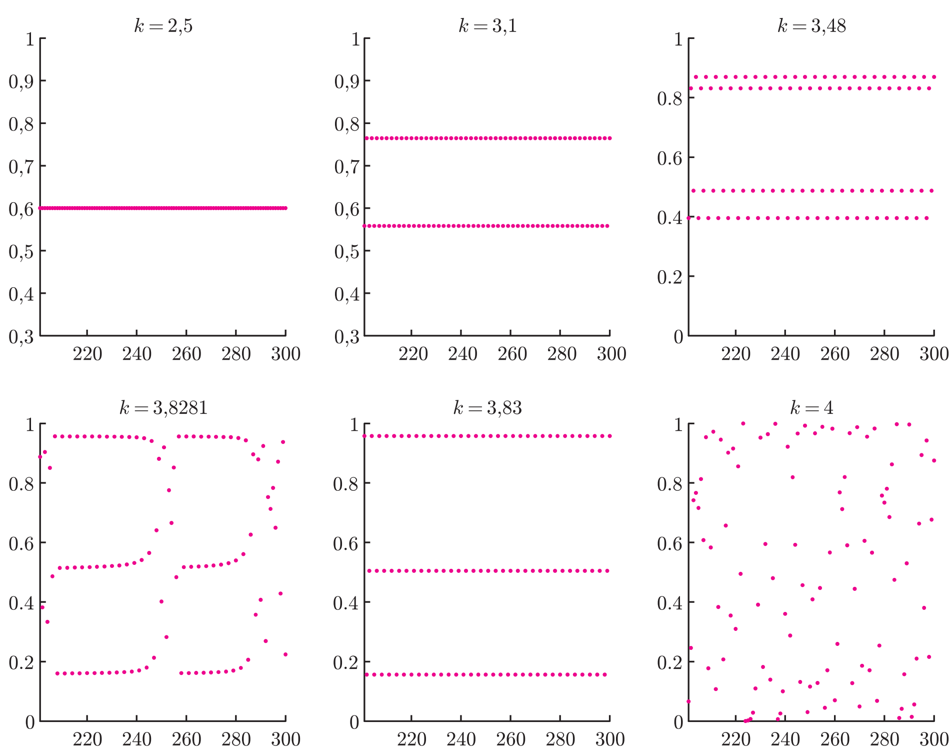
Istnieje wiele różnych sposobów na opisanie ciągu. Najwygodniejszym z nich jest bez wątpienia podanie jawnego wzoru na jego n-ty wyraz. Jednak często zdarza się, że jedyną informacją, jaką dysponujemy, jest równanie rekurencyjne, czyli równanie opisujące związek między wyrazami tego ciągu. Najprostszą z takich zależności rekurencyjnych, wiążącą n-ty wyraz wyłącznie z bezpośrednio go poprzedzającym, możemy ogólnie zapisać jako $x_n = f(x_{n-1})$, gdzie f jest pewną funkcją. Jeżeli chcemy znaleźć kolejne wyrazy tak opisanego ciągu, musimy znać na starcie przynajmniej jedną wartość, tę początkową, oznaczaną x_0. Niestety, jeżeli f nie jest funkcją liniową, to zazwyczaj nie jesteśmy w stanie z takiej zależności wydobyć jawnego wzoru na wyrazy ciągu. Wówczas z pomocą mogą przyjść nam komputery, dzięki którym możemy obserwować zachowanie ciągów opisywanych zależnościami rekurencyjnymi. Okazuje się także, że takie ciągi mogą wykazywać skomplikowane zachowanie nawet w sytuacji, gdy funkcja f z pozoru nie wygląda „groźnie”. Aby się o tym przekonać, weźmy pod uwagę następujące równanie rekurencyjne:

Równania rekurencyjne dla ciągów opisują *dyskretne układy dynamiczne.*

$$x_n = kx_{n-1}(1 - x_{n-1}) \tag{1}$$

z warunkiem początkowym $x_0 \in [0, 1]$ oraz z pewną stałą dodatnią k. O stałej k założymy dodatkowo, że jest nie większa od 4, dzięki czemu wyrazy tego ciągu nigdy nie przekroczą jedynki. Łatwo to sprawdzić, wiedząc, że funkcja $f(x) = kx(1 - x)$, zwana *odwzorowaniem logistycznym*, osiąga swoje maksimum dla $x = 0{,}5$. Równanie (1), mimo swojej pozornej prostoty, ma wiele intrygujących własności, z których lwia część została wykazana całkiem niedawno – po 1976 roku, kiedy uwagę na jego złożony charakter zwrócił matematyk, fizyk i biolog Robert May.

Aby prześledzić, jak zachowuje się ciąg opisywany równaniem (1) dla coraz większych wartości n (czyli zbadać jego asymptotykę), wykonamy najpierw eksperymenty komputerowe. Poniższe wykresy przedstawiają ciąg opisany badanym równaniem dla kilku wartości k, z tym samym warunkiem początkowym $x_0 = 0{,}6$, w zakresie od x_{200} do x_{300}.



Rys. 1. Ciągi (1) generowane przez odwzorowanie logistyczne.

Rozwiązanie zadania F 774.
Prędkość bombki tuż przed zderzeniem z podłogą wynosi $v_0 = \sqrt{2gh}$. Załóżmy, że przed zderzeniem z drugą bombką prędkość pierwszej wynosi v. W układzie odniesienia środka masy bombek będą się one zbliżały z prędkością $v/2$ każda. Zatem, aby obie się stłukły, musi zachodzić $v/2 = v_0$ i stąd $v = 2\sqrt{2gh}$.

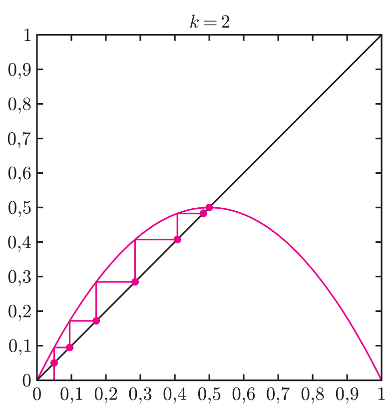
[*]Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski

Wyjaśnijmy wygląd tych wykresów. Zauważmy najpierw, że gdy $0 < k \leqslant 1$, to $x \geqslant kx(1-x)$ dla wszystkich $x \in [0,1]$. Oznacza to, że dla dowolnego $x_0 \in [0,1]$ wszystkie wyrazy ciągu spełniają nierówność $x_{n-1} \geqslant x_n$. Ciąg ten jest zatem nierosnący, a ponieważ jest również ograniczony z dołu przez 0, to klasyczne twierdzenie analizy matematycznej pozwala nam wywnioskować, że ma nieujemną granicę, którą oznaczymy przez g. Jak ją znaleźć? Z ciągłości odwzorowania logistycznego f wynika, że granica ta musi spełniać równanie $g = f(g)$, czyli – innymi słowy – jest punktem stałym funkcji f. Prosty rachunek prowadzi do spostrzeżenia, że przy rozważanych wartościach k odwzorowanie logistyczne ma tylko jeden nieujemny punkt stały: $g = 0$. Podsumowując, jeżeli tylko $0 < k \leqslant 1$, to niezależnie od tego, skąd wystartujemy, kolejne wyrazy ciągu będą zbliżać się coraz bardziej do zera.

Sposób tworzenia wykresów pajęczynowych dla równania $x_n = f(x_{n-1})$ jest bardzo prosty. Można opisać go w pięciu punktach:

1. Narysuj na jednym układzie współrzędnych wykres funkcji $y = f(x)$ oraz funkcji $y = x$.
2. Zaznacz na osi OX dany punkt startowy x_0 i poprowadź z niego w kierunku wykresu $y = f(x)$ odcinek równoległy do osi OY, aż do punktu ich przecięcia.
3. Z punktu przecięcia poprowadź teraz w kierunku wykresu $y = x$ odcinek równoległy do osi OX, aż do punktu ich przecięcia.
4. Z otrzymanego punktu przecięcia poprowadź w kierunku wykresu $y = f(x)$ odcinek równoległy do osi OY, aż do punktu ich przecięcia.
5. Powtarzaj teraz kolejno punkty 3. i 4.

Niestety, rozpatrzony właśnie przypadek był najprostszy. Już badanie sytuacji, gdy $k \in (1,3]$, jest trudniejsze, choć nie wymaga jeszcze zaawansowanych narzędzi matematycznych. Zatem bez żadnych wyliczeń powiedzmy, że gdy $1 < k \leqslant 3$, to dla każdego $x_0 \in (0,1)$ zależność rekurencyjna (1) daje ciąg, który zawsze jest zbieżny do $1 - \frac{1}{k}$ (gdy $x_0 = 0$ lub $x_0 = 1$, dąży on do zera). Łącząc otrzymane dotąd rezultaty, widzimy, że ciąg (1) jest zawsze zbieżny dla $0 < k \leqslant 3$. Dlaczego jednak granica tego ciągu zmienia się, gdy k przekracza 1? Odpowiedź na to pytanie kryje się w fakcie, że 0, czyli punkt stały odwzorowania logistycznego i zarazem granica ciągu dla $k \leqslant 1$, zmienia swój charakter, gdy k przekracza 1. Dla $0 < k \leqslant 1$ jest to bowiem *przyciągający punkt stały* (*atraktor*), a dla $k > 1$ – *odpychający punkt stały* (*repeler*). Dla $1 < k \leqslant 3$ granica ciągu odpowiada teraz drugiemu nieujemnemu punktowi stałemu odwzorowania logistycznego, równemu $1 - \frac{1}{k}$, który jest przyciągający. Charakter tego punktu stałego znakomicie tłumaczy tzw. *wykres pajęczynowy*.



Rys. 2. Wykres pajęczynowy dla ciągu (1) z $k = 2$ i $x_0 = 0{,}05$.

Na rysunku 2 pokazano wykres pajęczynowy dla równania (1) przy $k = 2$ i $x_0 = 0{,}05$. Punkt stały 0 jest odpychający, a 0,5 przyciągający, dlatego nawet biorąc wartość startową x_0, leżącą bardzo blisko 0, otrzymamy ciąg dążący do 0,5.

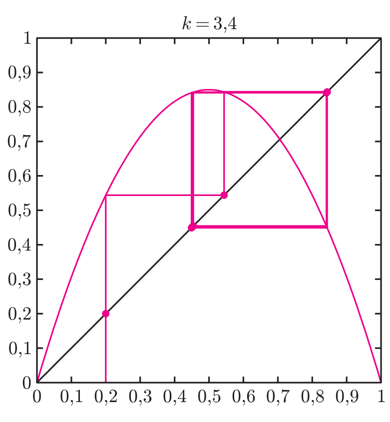
A co dzieje się, gdy k przekracza 3? Rysunek 1 sugeruje nam, że przynajmniej dla wartości k niewiele większych od 3 ciąg przestaje być zbieżny, a jego dalekie wyrazy zaczynają oscylować między dwiema wartościami: wyrazy ciągu o indeksach parzystych zbiegają do jednej z nich, natomiast wyrazy o indeksach nieparzystych do drugiej. Oznaczmy te wartości przez a i b. Zauważmy, że ponieważ $x_n = f(x_{n-1})$, wartości te muszą spełniać równości $f(a) = b$ i $f(b) = a$, skąd otrzymujemy, że $f(f(a)) = a$ oraz $f(f(b)) = b$. Aby więc wyznaczyć wartości a i b, wystarczy wyliczyć punkty stałe $f(f(x))$.

Cykl długości p to zbiór parami różnych punktów $\{a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}\}$, takich że $f(a_i) = a_{i+1}$ dla $i = 0, \ldots, p-2$ oraz $f(a_{p-1}) = a_0$.

Dla odwzorowania logistycznego mamy $f(f(x)) = k^2x(1-x)(1-kx+kx^2)$, a więc szukane punkty stałe to pierwiastki równania $k^2x(1-x)(1-kx+kx^2) - x = 0$. Nietrudno je wyznaczyć – są to

$$0, \quad 1 - \frac{1}{k}, \quad \frac{k+1+\sqrt{(k-3)(k+1)}}{2k} \quad \text{i} \quad \frac{k+1-\sqrt{(k-3)(k+1)}}{2k}.$$

Pierwsze dwa nas nie interesują, gdyż są one także punktami stałymi odwzorowania logistycznego f. Szukanymi przez nas wartościami a i b są pozostałe dwa pierwiastki. Stanowią one *cykl* (lub *orbitę*) długości 2. Można wykazać, że cykl ten jest przyciągający dla $3 < k < 1 + \sqrt{6} = 3{,}449489\ldots$ i, co więcej, dla wartości k z tego zakresu dalekie wyrazy ciągu (1) będą oscylowały wokół tego cyklu dla prawie wszystkich warunków początkowych x_0. Rysunek 3 przedstawia wykres pajęczynowy dla ciągu (1) z $k = 3{,}4$ i $x_0 = 0{,}2$.



Rys. 3. Wykres pajęczynowy dla ciągu (1) z $k = 3{,}4$ i $x_0 = 0{,}2$.

Jak widać, zwiększanie wartości parametru k nie tylko prowadzi do bardziej złożonych rachunków, ale i do coraz ciekawszych wyników. Najpierw ciąg opisany zależnością (1) jest zawsze zbieżny do zera, potem, gdy k przekracza 1, pozostaje zbieżny, ale do innej wartości, gdy zaś k mija 3, to z drobnymi wyjątkami ciąg zaczyna zbiegać do cyklu długości 2. Co więc może się dziać, gdy ten cykl przestanie być przyciągający (czyli dla $k > 1 + \sqrt{6}$)? Jak intuicja

Zjawisko podwajania długości cyklu nazywamy bifurkacją podwajania okresu, punkty zaś, w których następuje to podwojenie, nazywamy punktami bifurkacji.

wsparta rysunkiem 1 może nam sugerować, powstanie wówczas nowy cykl, tym razem długości 4, który dla pewnych wartości k (dokładniej, dla $1 + \sqrt{6} < k < 3{,}544\ldots$) będzie przyciągający. Skoro tak, to pewnie po zmianie charakteru tego cyklu na odpychający powstanie przyciągający cykl długości 8? Otóż to, a potem powstaną kolejno cykle długości 16, 32, 64 i tak dalej. Poniższa tabelka opisuje, dla jakich zakresów k dane cykle długości 2^n będą przyciągające (liczby zostały tu zaokrąglone do 4 miejsc po przecinku).

n	kiedy cykl 2^n jest atraktorem
1	$3 < k < 1 + \sqrt{6} \approx 3{,}4495$
2	$1 + \sqrt{6} < k < 3{,}5441$
3	$3{,}5441 < k < 3{,}5644$
4	$3{,}5644 < k < 3{,}5688$
5	$3{,}5688 < k < 3{,}5697$
6	$3{,}5697 < k < 3{,}5699$

Z tabelki tej płynie ciekawa obserwacja, a mianowicie dla każdego kolejnego cyklu przedział wartości k, dla których cykl ten jest przyciągający, jest coraz krótszy. Nasuwa się więc pytanie, co się dzieje z tymi przedziałami, gdy n dąży do nieskończoności? Okazuje się, że zbiegają one do punktu $k^* \approx 3{,}569945672$.

Jak wieść niesie, wspomniany już Robert May zapisał równanie (1) na tablicy w korytarzu jako zadanie dla swoich studentów i dopisał pytanie *Co, na Boga, dzieje się dla* $k > k^*$? No cóż, w tym przypadku dzieje się naprawdę wiele. Przede wszystkim pojawia się chaos – ciąg opisywany zależnością (1) zaczyna przejawiać zachowania chaotyczne! Innymi słowy, dla odpowiednich k równanie (1) to wówczas nic innego, jak swego rodzaju przepis na chaos.

Jednak nie jest tak, że dla każdego $k^* < k \leqslant 4$ będziemy otrzymywać już tylko i wyłącznie ciągi chaotyczne. Okazuje się bowiem, że dla pewnych zakresów k z tego przedziału ponownie pojawią się przyciągające cykle i to dowolnej długości różnej od 2^n. Jako ostatni zaznaczy swoją obecność cykl długości 3, przyciągający dla $1 + 2\sqrt{2} = 3{,}828427\ldots < k < 3{,}841499\ldots$ (piąty wykres na rysunku 1). Warto w tym miejscu wspomnieć, że odwzorowanie logistyczne ze stałą $k \in [1 + 2\sqrt{2}, 4]$ ma bardzo ciekawą własność: ma cykle dowolnej długości, z których zawsze tylko co najwyżej jeden będzie przyciągający (wynika to z dwóch słynnych twierdzeń teorii układów dynamicznych: Szarkowskiego i Fatou).

Chcąc w pełni opisać i wytłumaczyć zachowanie badanego ciągu przy wzroście parametru k od k^* do 4, musielibyśmy użyć dość zaawansowanej matematyki. Możemy jednak pokrótce streścić jego zachowanie jako naprzemienne pojawianie się chaosu (wówczas wykresy dalekich wyrazów ciągu nie wykazują żadnych widocznych wzorców) i cykli przyciągających (wtedy wykresy dalekich wyrazów ciągu będą oscylować między pewną liczbą wartości). Dodajmy jeszcze, że gdy k jest równe 4, otrzymamy ciąg w pewnym sensie „najbardziej” chaotyczny.

Świetną i zarazem bardzo prostą ilustracją zachowań chaotycznych w otaczającym nas świecie jest sposób, w jaki woda kapie z kranu w zależności od siły jej przepływu. W sprzyjających warunkach można tu nawet dostrzec bifurkację podwajania okresu, związaną ze stopniowym odkręcaniem kranu, czyli ze zwiększaniem natężenia przepływu wody.

Dotarliśmy zatem do końca naszej wędrówki z parametrem k. Z tej perspektywy widać, że odwzorowanie logistyczne jest doskonałym przykładem na to, że chaos nie musi pojawiać się tylko i wyłącznie w bardzo złożonych układach. Istotne jest to, aby były one nieliniowe. Jak pisał bowiem o chaosie profesor Leon Ong Chua, wybitny autorytet m.in. w zakresie dynamiki nieliniowej: „Opoką tych terenów lokalnych i globalnych bifurkacji jest wszechobecna nieliniowość, niegdyś bezmyślnie linearyzowana przez inżynierów i innych adeptów nauk ścisłych, którzy tym samym trwonili swą jedyną szansę zmierzenia się z rzeczywistością” (podaję za książką *Granice chaosu. Fraktale*). Niewątpliwie dużo w tych słowach racji. Chaos jest praktycznie wszechobecny w otaczającym nas świecie. Modele opisujące dość wiernie takie zjawiska z życia wzięte to zazwyczaj układy wielu skomplikowanych równań nieliniowych. Ale pamiętajmy, że czasami do ich opisu wystarczy jedna, prosta funkcja nieliniowa, czego najlepszym przykładem jest właśnie odwzorowanie logistyczne.