Mamy oczywiście dla dowolnych $d$ i $z$

$$\mathrm{P}(D_1^{d,z}) = \frac{d}{d+z} \quad \text{i} \quad \mathrm{P}(Z_1^{d,z}) = \frac{z}{d+z}.$$

Załóżmy (będziemy rozumować indukcyjnie, co tutaj jest bardzo naturalne), że $(*)$ zachodzi dla pewnego $k < d+z$. Mamy

Stosujemy tutaj tzw. wzór na prawdopodobieństwo całkowite: jeśli $B_1$, $B_2$ to takie dwa wykluczające się zdarzenia, że któreś z nich na pewno zachodzi, to dla dowolnego zdarzenia $A$ jest

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A \cap (B_1 \cup B_2)) = \\ &= \mathrm{P}(A \cap B_1) + \mathrm{P}(A \cap B_2) = \\ &= \mathrm{P}(A|B_1)\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A|B_2)\mathrm{P}(B_2).\end{aligned}$$

U nas bierzemy $B_1 = D_1^{d,z}$, $B_2 = Z_1^{d,z}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D_{k+1}^{d,z}) &= \mathrm{P}(D_{k+1}^{d,z}|D_1^{d,z}) \cdot \mathrm{P}(D_1^{d,z}) + \mathrm{P}(D_{k+1}^{d,z}|Z_1^{d,z}) \cdot \mathrm{P}(Z_1^{d,z}) = \\ &= \mathrm{P}(D_k^{d-1,z}) \cdot \frac{d}{d+z} + \mathrm{P}(D_k^{d,z-1}) \cdot \frac{z}{d+z} \overset{(*)}{=} \\ &\overset{(*)}{=} \frac{d-1}{d-1+z} \cdot \frac{d}{d+z} + \frac{d}{d-1+z} \cdot \frac{z}{d+z} = \\ &= \frac{d}{d+z} \cdot \left( \frac{d-1}{d-1+z} + \frac{z}{d-1+z} \right) = \frac{d}{d+z},\end{aligned}$$

co pokazuje prawdziwość $(*)$ dla dowolnego $k$.

Zatem nawet gdy wejdziemy na egzamin jako ostatni, szansa jego zdania będzie równa $\frac{1}{2}$, bo $\mathrm{P}(D_{15}^{10,10}) = \frac{10}{10+10}$. Być może kłóci się to troszkę z intuicją, ale dowodzi, że żadne chytre strategie nic tu nie pomogą – jaką część pytań opanowaliśmy, taką mamy szansę zdania egzaminu.

Może jednak strategie, jakie rozważaliśmy, były zbyt proste? Na przykład, student wchodził na egzamin w deterministycznej chwili $k$, czyli w ogóle nie wykorzystywał informacji – co prawda losowej, ale zawsze dodatkowej – którą przekazywali mu zdający do chwili $k$ koledzy. Tzn. nie brał pod uwagę informacji, które pytania profesor już zużył. Okazuje się jednak, że nawet stosując jakąś niby bardziej przebiegłą strategię (np. student wchodzi tuż po tym, gdy zostanie zadane któreś ze *złych* pytań), w której wykorzystamy wszelkie informacje, jakich dostarczyli nam zdający wcześniej koledzy, zawsze uzyskamy prawdopodobieństwo zdania egzaminu równe $\frac{1}{2}$. Ale ścisły dowód tego faktu jest już mniej elementarny. Niemniej zachęcam Czytelników do sprawdzenia, czy tak jest w przypadku samodzielnie wymyślonych konkretnych strategii, albo do prób wykazania tego ogólnego faktu w przypadku mniejszych danych – na przykład dwóch *dobrych*, dwóch *złych* pytań i łącznie trzech studentów.

## Funkcje odwrotne do siebie

Funkcja $f_1(x) := x$ zwraca (jak brzydko mówią informatycy) to, co się do niej włoży. Funkcja $f_2(x) := -x$ zwraca nie całkiem to samo, ale gdy ją wykonać dwukrotnie, znów wracamy do tego, z czego wyszliśmy: $f_2(f_2(x)) = f_2(-x) = x$. Takie funkcje to *inwolucje*. Spróbujmy znaleźć jeszcze inne inwolucje wśród *funkcji wymiernych*, to jest postaci $f(x) = V(x)/W(x)$, gdzie $V$ i $W$ są wielomianami.

Od razu przychodzi do głowy funkcja $f_3(x) := 1/x$. I od razu widać, że to inwolucja. Zaraz potem sprawdzamy $f_4(x) := -1/x$. Faktycznie – to też inwolucja:

$$f_4(f_4(x)) = \frac{-1}{f_4(x)} = \frac{-1}{\frac{-1}{x}} = x.$$

No, a dalej? Sprawdzamy $f_5(x) := 2/x$ – też się zgadza! No to już wiemy, że każda funkcja postaci $f_{(\alpha)}(x) := \alpha/x$ dla $\alpha \neq 0$ jest inwolucją.

Mamy więc już nieskończenie wiele inwolucji wśród funkcji wymiernych. Ale czy odnaleźliśmy już wszystkie?

Nie trzeba specjalnej wyobraźni, by stwierdzić, że nie – przecież inwolucją jest także $f_6(x) := 1 - x$.

No to spróbujmy całkiem fantazyjnie – może $f_7(x) := (x+1)/(x-1)$? Sprawdzamy:

$$f_7(f_7(x)) = f_7\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{2x}{2} = x,$$

czyli i ta funkcja okazała się inwolucją.

Wyraźnie widać, że poszukiwania inwolucji wśród funkcji wymiernych należałoby kontynuować. Nie sądzę jednak, że można łatwo wpaść na to, jakie jeszcze funkcje należą do tej rodziny. Ja po prostu zapytałem algebraików. Odpowiedź okazała się zaskakująca:

Wśród funkcji wymiernych inwolucje to $f_{(\alpha)}$ dla $\alpha \neq 0$, oraz $f_{(\alpha,\beta)}(x) := \dfrac{x+\alpha}{\beta \cdot x - 1}$ dla $\alpha \cdot \beta \neq -1$ i tylko one.

Czytelnik Niedowiarek sprawdzi, że dla dozwolonych $\alpha$ i $\beta$ faktycznie $f_{(\alpha,\beta)}(f_{(\alpha,\beta)}(x)) = x$; Czytelnik Ambitny poszuka dowodu, że żadnej innej inwolucji będącej funkcją wymierną nie ma. Natomiast Czytelnik Podchwytliwy zapyta: – *A gdzie funkcja $f_2$ albo $f_6$?*

*Marek KORDOS*