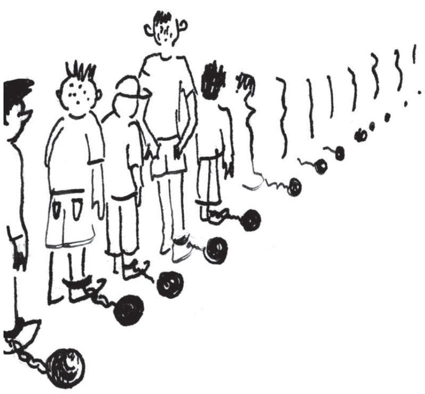
Więzienie Hilberta

Zofia MIECHOWICZ[*]

To jest kraj dla mądrych ludzi

Jest gdzieś w świecie abstrakcji taki kraj, w którym największą zbrodnią, jaką człowiek może popełnić, jest zbrodnia przeciwko rozumowi, a najbardziej rygorystycznie przestrzeganymi prawami są prawa logiki. Służby porządkowe bardzo dbają o poprawność myślenia, więc wszelkie osobniki, których myśli nie biegną prawidłowymi torami, są natychmiast umieszczane w zakładach karnych. Oczywiście, każda zbrodnia może zostać odkupiona, a najważniejsza jest resocjalizacja. Naczelnicy i strażnicy więzienni starają się, żeby jak największa liczba więźniów wróciła do swoich domów, jednak dopiero po wtłoczeniu wystarczającej ilości rozumu do głowy. Jedyną szansą na odzyskanie wolności dla tych nieszczęśników jest wykazanie się błyskotliwością i matematycznym sprytem. Szanse takie dostają oni często, jednak tylko nielicznym udaje się sprostać wysokim wymaganiom systemu. Pewnego razu rezydenci jednego z zakładów stanęli przed niezwykle ciekawym zadaniem.



Prosta droga do pewności

Paweł i Gaweł, odsiadujący karę za domową awanturę, dzielili ciasną celę w więzieniu przeznaczonym dla n osób. Był piękny, słoneczny poranek, kiedy wszyscy więźniowie, jak co dzień, spotkali się na spacerniaku. Naczelnik zarządził zbiórkę w szeregu i odezwał się w te słowa.

– Stoicie przed ogromną szansą. Możecie już dziś wszyscy opuścić więzienie. Wieczorem każdemu z was zostanie na czole odciśnięty numer: liczba całkowita z zakresu od 0 do $n-1$. Liczby te będą mogły powtarzać się. Opuścicie więzienie, gdy co najmniej jeden z was odgadnie, jaki numer ma odciśnięty na czole. Możecie ustalić wspólną strategię, ale jedynymi informacjami, z jakich możecie korzystać, są liczby widoczne na czołach współwięźniów. Jeżeli którykolwiek z was udzieli innemu nielegalnej informacji, to szansa przepadnie. Odpowiedzi udzielać będziecie równocześnie, pisząc liczbę na kartce, więc żadna strategia, która wykorzystuje odpowiedzi innych, nie wchodzi w grę. Nie zawiedźcie mnie. Jeżeli wam się nie uda, to wszyscy zostajecie tutaj.

Gdy tylko więźniowie zyskali chwilę dla siebie, rozpoczęły się ożywione dyskusje. Ktoś bardziej obeznany z rachunkiem prawdopodobieństwa zauważył, że jeżeli będą stosowali strategię losową, to szansa każdego z nich na odgadnięcie wynosi $\frac{1}{n}$, więc szansa na to, że nie trafi, to aż $\frac{n-1}{n}$. Prawdopodobieństwo tego, że nie trafi żaden, wynosi $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$. Udało im się ustalić, że grając losowo, wyjdą na wolność z prawdopodobieństwem $1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$, czyli co najmniej $1-\frac{1}{e}$. Szansa duża, około 0,63. Więźniowie wiedzieli jednak, że musi tkwić w tym coś więcej. W końcu stosowanie losowej strategii nie wymaga zbytniego polotu. Z ciężkimi od myślenia głowami i przeświadczeniem, że istnieje strategia, która da im pewność zwycięstwa, wrócili przed obiadem do swoich cel.

Paweł i Gaweł nie lubili dużych liczb. Woleli, aby zadanie dotyczyło tylko ich dwójki. O ile prostsze byłoby wtedy.

– Pomyśl – powiedział Paweł – gdyby chodziło tylko o nas dwóch, to liczby, jakie moglibyśmy mieć na czołach, to byłaby tylko jedynka i zero. Nie dość, że w grę wchodziłyby tylko dwie liczby, to jeszcze możliwe byłyby tylko dwie sytuacje. Albo mielibyśmy na czołach te same liczby, albo różne.

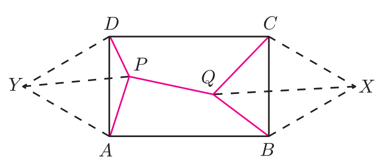
– To prawda – przytaknął mu Gaweł – moglibyśmy wtedy wyjść na wolność z całą pewnością. Wystarczyłoby, żebym ja przyjął, że zachodzi ta pierwsza sytuacja i obstawił taką samą liczbę, jak twoja, a ty powiedziałbyś, że masz na czole liczbę, która jest różna od mojej. Któryś z nas na pewno by trafił.

– Ale to tylko taki mały przypadek. Myślisz, że dałoby się tę strategię jakoś przenieść na większą liczbę osób?

Z iskierką nadziei podzielili się swoimi przemyśleniami z innymi podczas obiadu. Długo panowała cisza, aż wreszcie głos zabrał najstarszy, doświadczony już wieloma porażkami rezydent.

– To świetny pomysł! Tylko musicie zauważyć, co tak naprawdę zrobiliście. Jeżeli liczby na waszych czołach były takie same, to w sumie dawały liczbę parzystą. Jeżeli były różne, to ich suma dawała resztę jeden z dzielenia przez 2. Każdy z was obstawiał po prostu inną resztę z dzielenia przez 2 sumy numerów na czołach. Możemy zrobić dokładnie to samo dla dowolnego n.

Rozwiązanie zadania M 1289.
Niech $a = AB$ oraz $b = BC$. Na bokach BC i DA zbudujmy, po zewnętrznej stronie prostokąta, trójkąty równoboczne BCX oraz DAY.



Wówczas wykorzystując nierówność Ptolemeusza dla czworokątów $DYAP$ oraz $BXCQ$, uzyskujemy

$$AP\cdot b + DP\cdot b \geqslant YP\cdot b$$
$$BQ\cdot b + CQ\cdot b \geqslant QX\cdot b.$$

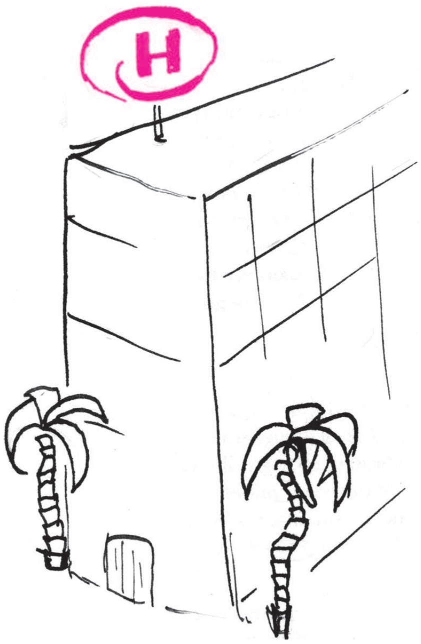
Stąd otrzymujemy

$$AP + DP + PQ + BQ + CQ \geqslant$$
$$\geqslant YP + PQ + QX \geqslant XY = a + b\sqrt{3}.$$

[*]Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski

– Jak to, to samo? – żachnął się ktoś – Przecież jest nas tak dużo.

– Wystarczy, że ustalimy teraz, którą resztę z dzielenia przez n każdy z nas będzie obstawiał. Potem każdy zsumuje liczby widoczne na czołach towarzyszy i sam dobierze taką, żeby po dodaniu jej do uzyskanej sumy otrzymać liczbę, która z dzielenia przez n daje resztę mu przypisaną. Dysponujemy liczbami z zakresu od 0 do $n-1$, więc ta liczba jest określona jednoznacznie. Zastanówcie się chwilę, w taki sposób któryś z nas trafi na pewno. Jest nas dokładnie tyle, ile reszt, które trzeba obstawić. Mamy więc pewność! Towarzysze, jeszcze dziś wszyscy będziemy wolni!



Kara dla recydywistów

Paweł i Gaweł niedługo cieszyli się wolnością. Szybko okazało się, że ta krótka wizyta w zakładzie karnym niczego ich nie nauczyła. Jako recydywiści trafili do więzienia o zaostrzonym rygorze, zwanego więzieniem Hilberta. Miejsce to w dobie swojej świetności było luksusowym hotelem. Niestety, w wyniku kryzysu na światowych rynkach hotel zbankrutował i został przejęty przez władze. Przerobiono go na zakład karny, a jedynym wspomnieniem po dawnych, dobrych czasach zostało nazwisko wcześniejszego właściciela wymieniane w jego nazwie. Kluczowym dla decyzji o uczynieniu z tego miejsca więzienia był fakt, że budynek mógł pomieścić nieskończenie wiele osób. Nawet jeżeli wszystkie cele były już zajęte, zawsze znalazło się miejsce dla nowego rezydenta. Wystarczyło, żeby każdego więźnia przeniesiono do celi o numerze o jeden większym. W efekcie początkowa cela zwalniała się, a każdy więzień nadal miał swoją pryczę. Znalazło się tam miejsce również dla Pawła i Gawła. Nasi bohaterowie mieli jednak niezwykłe szczęście. Już po kilku dniach pobytu stanęli przed zadaniem, które do złudzenia przypominało to, dzięki któremu ostatnio odzyskali wolność.

Ponownie każdemu więźniowi wypisany został na czole numer – tym razem mogła to być dowolna liczba naturalna. I ponownie każdy miał za zadanie odgadnąć liczbę, która została mu przypisana. Sposób udzielania odpowiedzi był taki sam jak poprzednio. Więźniowie nie mogli słyszeć odpowiedzi towarzyszy. Niestety, tym razem zadanie było o wiele trudniejsze, gdyż w związku z nieskończoną liczbą możliwych prób odgadnąć musiał nie tylko jeden więzień. Wszyscy mieli odzyskać wolność pod warunkiem, że w zgadywaniu pomyli się co najwyżej skończona liczba więźniów.

Problem, mimo że podobny do poprzedniego, w którym istniała niezawodna strategia, na pierwszy rzut oka wyglądał beznadziejnie. Zgadywanie losowe nie dawało żadnych szans (pomijając problem losowego wyboru liczby naturalnej)! Na szczęście, co nieskończenie wiele głów, to nie jedna. Wytężony wspólny wysiłek zaczął powoli prowadzić więźniów ku wolności. Najpierw udało im się zauważyć, że gdyby ustawili się w pewnym porządku, na przykład zgodnym z numerami cel, które zajmują, to liczby wypisane na czołach utworzą nieskończony ciąg o wyrazach naturalnych. Jeżeli przyjrzymy się dowolnym dwóm takim ciągom, to możemy określić, na ilu pozycjach się one różnią. Czasami jest to skończona liczba pozycji, a czasami różnic jest nieskończenie wiele.

Kierując się zupełnie naturalną w tym przypadku intuicją, postanowili podzielić wszystkie ciągi liczb naturalnych ze względu na to kryterium. Znaleźli w swoich celach nieskończenie wiele worków i do każdego z nich wrzucali wszystkie ciągi, które różnią się tylko na skończonej liczbie pozycji. Szybko zauważyli, że takie rozmieszczenie jest bardzo porządne. Jeżeli w pewnym worku znalazły się jakieś ciągi, to nowy ciąg, który różni się od jednego z nich tylko na skończonej liczbie pozycji, zachowuje się dokładnie tak samo w stosunku do pozostałych, więc można go do nich dorzucić. Brali więc kolejne ciągi i wrzucali do odpowiednich worków bądź do worka pustego, jeżeli nie istniał jeszcze taki z pasującymi ciągami. Po zakończeniu tej operacji każdy ciąg miał swój worek. Co więcej, każdy znalazł się w dokładnie jednym worku. I z tego miejsca droga na wolność okazała się już nadzwyczaj prosta. Przecież ciąg numerów, które mieli na czołach, również znajdował się w którymś worku. W dodatku, każdy z więźniów, nie widząc jedynie swojego numeru, mógł jednoznacznie określić, który to worek! A przecież ich zadanie polegało na wyciągnięciu wspólnie jednego z ciągów z tego właśnie worka. W końcu ich odpowiedź to po prostu pewien ciąg – taki, który różni się od wyrysowanego na ich czołach tylko na skończonej liczbie pozycji.

Pozostało ustalić, w jaki sposób wspólnie (nie słysząc odpowiedzi współwięźniów) mogą trafić w jeden z ciągów z tego worka. Ależ nic prostszego! Wystarczy, że wcześniej dla każdego worka wybiorą reprezentanta, a potem, jak już ustalą, w którym worku znajduje się ciąg z ich twarzy, będą obstawiać kolejne wyrazy odpowiedniego reprezentanta. W taki sposób wybiorą ciąg, który od rzeczywistego różni się na skończonej liczbie pozycji, więc tylko skończona liczba z nich nie trafi. Jednak mogą wyjść na wolność! I to z całą pewnością! A ile czasu zajmie im wrzucanie wszystkich ciągów na świecie do worków, to już zupełnie inna historia…

Rozwiązanie zadania M 1288.
Jeśli wszystkie punkty są jednakowego koloru, to taka trójka punktów istnieje.

Załóżmy zatem, że istnieją punkty dwóch kolorów np. czarne i białe. Wśród nich istnieją dwa tego samego koloru. Oznaczmy je A_{-1}, A_1 i umieśćmy na takiej osi liczbowej, że punkt A_{-1} odpowiada liczbie -1, a punkt A_1 odpowiada liczbie 1. Punkt odpowiadający liczbie całkowitej n oznaczać będziemy A_n.

Możemy przyjąć, bez straty ogólności, że punkty A_{-1} i A_1 są czarne. Jeżeli punkt A_0 jest czarny, to mamy trójkę punktów spełniających warunki zadania. Jeżeli natomiast punkt A_0 jest biały, to bierzemy pod uwagę jeszcze punkty: A_{-3}, A_3. Jeżeli jeden z punktów A_{-3}, A_3 jest czarny, to ten punkt wraz z punktami A_{-1} i A_1 tworzy trójkę punktów spełniającą warunki zadania. W przeciwnym razie każdy z punktów A_{-3}, A_0, A_3 jest biały i tworzą one trójkę punktów spełniającą warunki zadania.