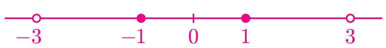
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

W roku 2008 Uniwersytet Warszawski we współpracy ze Stowarzyszeniem na rzecz Edukacji Matematycznej zorganizował w Sulejowie konferencję *Konkursy matematyczne w Polsce*. Po konferencji przy V LO w Bielsku-Białej zawiązała się grupa nauczycieli i uczniów, którzy pracowali nad wyborem materiałów przydatnych w pracy z uczniami uzdolnionymi matematycznie, zarówno w gimnazjum, jak i w szkole ponadgimnazjalnej. Efektem ich pracy jest zbiór zadań *Przed konkursem matematycznym*, który stał się pierwszym tomem serii wydawniczej *Biblioteczka Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej*. W ramach tej serii SEM planuje publikowanie różnych materiałów przydatnych zarówno nauczycielom, jak i uczniom zainteresowanym poszerzaniem swojej wiedzy i sprawności matematycznej.

Przyjrzyjmy się rozwiązaniom dwóch zadań wybranych ze zbioru *Przed konkursem matematycznym*.

1. *Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z dwóch kolorów. Rozstrzygnąć, czy zawsze istnieją trzy parami różne punkty jednego koloru, z których jeden jest środkiem odcinka, którego końcami są dwa pozostałe.*



Jeżeli wszystkie punkty płaszczyzny są jednego koloru, to końce dowolnego odcinka i jego środek spełniają warunki zadania. Załóżmy więc, że istnieją punkty dwóch kolorów, np. czarne i białe. Pewne dwa punkty muszą być tego samego koloru, na przykład czarnego. Niech będą to punkty pewnej osi liczbowej odpowiadające liczbom 1 oraz -1. Gdyby liczba 3 była czarna, to liczby -1, 1, 3 spełniałyby warunki zadania. Analogicznie byłoby dla liczby -3. Pomalujmy więc liczby -3 oraz 3 kolorem białym. Teraz liczba 0 jest środkiem odcinka o czarnych końcach -1 i 1 oraz środkiem odcinka o białych końcach -3 i 3. Zatem w każdym przypadku można wybrać punkty spełniające warunki zadania.

2. *Ile różnych liczb występuje w ciągu*

$$\left[\frac{1^2}{2009}\right], \left[\frac{2^2}{2009}\right], \left[\frac{3^2}{2009}\right], \ldots, \left[\frac{2009^2}{2009}\right],$$

gdzie $[x]$ oznacza największą liczbą całkowitą nie większą niż x?

Zauważmy, że jeżeli liczby rzeczywiste x i y $(x < y)$ różnią się o mniej niż 1, to $[x] = [y]$ lub $[y] = [x] + 1$; jeśli natomiast różnią się o co najmniej 1, to $[x] < [y]$.

Wyznaczmy największą liczbę naturalną n, dla której różnica między liczbami $\frac{(n+1)^2}{2009}$ i $\frac{n^2}{2009}$ jest mniejsza od 1, czyli

$$\frac{(n+1)^2}{2009} - \frac{n^2}{2009} < 1.$$

Stąd $n < 1004$, więc $n = 1003$. Oznacza to, że wśród liczb

$$\left[\frac{1^2}{2009}\right], \left[\frac{2^2}{2009}\right], \ldots, \left[\frac{1003^2}{2009}\right]$$

występują wszystkie liczby całkowite od 0 do

$$\left[\frac{1003^2}{2009}\right] = 500,$$

których jest 501.

Jeżeli natomiast różnica między liczbami $\frac{(n+1)^2}{2009}$ i $\frac{n^2}{2009}$ jest równa co najmniej 1, to liczby $\left[\frac{n^2}{2009}\right]$ i $\left[\frac{(n+1)^2}{2009}\right]$ są różne. Zachodzi to dla $n \geqslant 1004$.

Zatem wszystkich różnych liczb w danym ciągu jest

$$501 + (2009 - 1003) = 501 + 1006 = 1507.$$

W omawianym zbiorze autorzy zaproponowali 128 niestandardowych zadań, które zostały pogrupowane tematycznie. Znalazły się tu m.in. rozdziały: równania diofantyczne, kongruencje, część całkowita i ułamkowa liczby rzeczywistej, trójkąt równoboczny.

Więcej o broszurze *Przed konkursem matematycznym* można przeczytać na stronie internetowej www.sem.edu.pl/omg/

Zarząd Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej