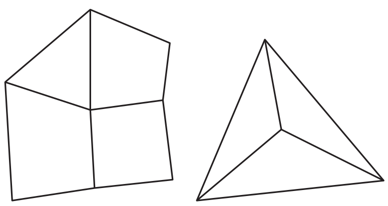
mała delta

Ściany, krawędzie, wierzchołki



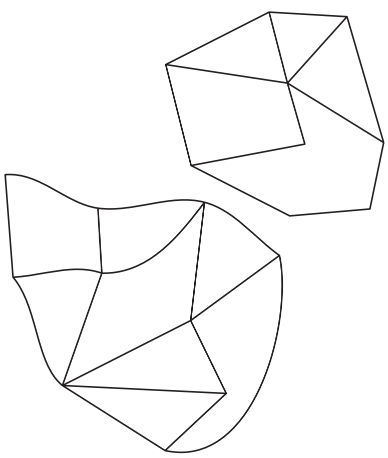
Rys. 1

– A cóż to za obrazki? Projektujesz witraże? – złośliwość starszych braci nie ma granic, jeśli chodzi o rozpoczęcie rozmowy z siostrą.

– Skądże, zajmuję się matematyką. – odpowiedziała poważnie Asia, nie podnosząc oczu znad kartki, która wyglądała mniej więcej tak, jak na rysunku 1. Zgadła: zamiast śmiać się z jej obrazków Maciek usiadł obok i zaczął wpatrywać się w kartkę.

– To już nie bądź taka tajemnicza i powiedz, o co chodzi…

– Zobacz, jeśli na którymś z tych rysunków policzysz liczbę wielokątów, odejmiesz liczbę odcinków i dodasz liczbę punktów, to dostaniesz 1! Czy to nie jest ciekawe?



Rys. 2

Maciek powiedział tylko, że pewnie zaraz znajdą obrazek, dla którego to już nie będzie prawda. I stworzyli wspólnie jeszcze kilka „projektów witraży”, ale wzór cały czas uparcie był prawdziwy. Również wtedy, gdy przestali dbać o wypukłość wielokątów, a nawet kiedy w szybko tworzonych rysunkach odcinki zaczęły być trochę krzywe (rys. 2).

– Tylko pamiętaj, żeby nie przecinać odcinków w nieoznaczonych punktach, bo wtedy nie działa, już sprawdziłam. – Asia szybko zniszczyła bratu pomysł na rysunek, dla którego wzór daje błędny wynik.

– Może jednak coś w tym jest… – mruknął po chwili rysowania zamyślony Maciek, a siostra-matematyk z wielką powagą oznajmiła:

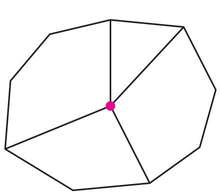
– Musimy to udowodnić!

– To jak się za to zabierzesz? Przykładowe obrazki to chyba trochę za mało, nie?

– Pewnie, ale moglibyśmy najpierw zbadać obrazki o prostym kształcie, na przykład wielokąty, i sprawdzić dla nich wzór. A przecież każdy obrazek na pewno możemy otrzymać, zaczynając z jakiegoś wielokąta i dodając nowe punkty i krawędzie, więc wystarczy zobaczyć, ile nowych obszarów (niektóre z tych na rysunku 2 trudno nazwać wielokątami) tworzy się przy takim rozszerzaniu rysunku…

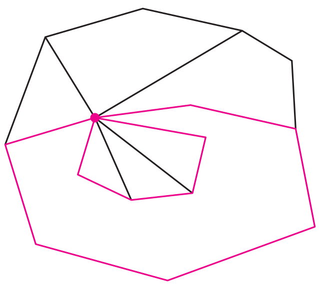
– Jesteś pewna, że to takie oczywiste? Chyba trzeba by sprawdzić mnóstwo przypadków… A co powiesz na taką zmianę: weźmiemy dowolny obrazek i popatrzymy, czy skasowanie jednego punktu i wychodzących z niego krawędzi zmienia twój wzór…

– Świetnie! – przerwała Maćkowi siostra – W ten sposób wyrzucając kolejne punkty, doprowadzimy początkowy obrazek do jakiegoś prostego i wystarczy sprawdzić, czy dla tego prostego obrazka wzór będzie działał.



Rys. 3

– To zobaczmy, co się dzieje, gdy wyrzucamy punkt, z którego wychodzi k krawędzi. Najlepiej, dopóki możemy, wyrzucajmy punkty wewnętrzne, czyli te, które nie leżą na brzegu obrazka. Wyrzucenie ich chyba więcej upraszcza… – żeby pomóc sobie w obliczeniach, Maciek narysował przykład, który widzimy na rysunku 3.



Rys. 4

– Policzmy: wyrzucamy jeden punkt, k krawędzi, a jak wyrzucimy te krawędzie, to znika też k obszarów... Ale za to dostajemy jeden duży obszar w miejsce tych wyrzuconych. Czyli lewa strona wzoru zmieni się o -1 punkt $+k$ krawędzi $-k+1$ obszarów, czyli... nie zmieni się wcale! Jeśli wzór jest prawdziwy dla obrazka z wyrzuconym punktem, to jest też prawdziwy dla początkowego.

Rodzeństwo przeoczyło co prawda pewien szczególny przypadek: może się zdarzyć tak, że brzeg pewnego obszaru przechodzi kilka razy przez wyrzucany punkt (jak kolorowa łamana na rysunku 4). Ale poza tym ich pomysł jest dobry, a może Czytelnik zechce uzupełnić szczegóły dowodu.

Maciek prześledził obliczenie siostry i dołożył końcowy krok:

– A jak już wyrzucimy wszystkie punkty wewnętrzne, to zostanie nam tylko ciąg krawędzi ograniczający jeden obszar. Sprawdzamy dla niego nasz wzór: jeden obszar minus ileś krawędzi plus tyle samo wierzchołków co krawędzi, czyli wyszło 1. Niesamowite, ten wzór naprawdę działa...

Trochę później Maciek przypomniał sobie, że już widział podobny wzór. Jeśli weźmiemy dowolny wielościan wypukły, dodamy liczbę jego ścian i liczbę wierzchołków, a potem odejmiemy liczbę krawędzi, to dostaniemy w wyniku 2 – to jest przecież wzór Eulera! Opowiedział o tym siostrze, kończąc słowami:

– Tylko tam na pewno było 2, a nie 1, jak dla naszych obrazków. Może coś jednak jest źle...

Asia myślała nad tym do wieczora, a w końcu oznajmiła bratu:

– Przecież to oczywiste! Każdy wypukły wielościan można przerobić na nasz obrazek, stawiając go na kartce, wyrzucając ścianę, na której stoi, i wciskając wszystkie punkty i wierzchołki na kartkę w miejsce wyrzuconej ściany.

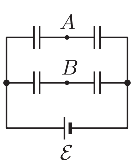
Zrozumienie tego pomysłu i jego wpływu na badany przez nich wzór zajęło Maćkowi chwilę, ale szybko uznał, że siostra ma naprawdę niezłą wyobraźnię.

Małą Deltę przygotowała Maria DONTEN-BURY

Zadania

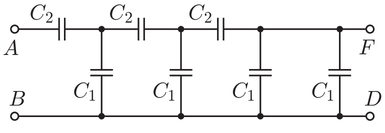
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 771. Mamy obwód składający się ze źródła napięcia oraz czterech kondensatorów: trzech o jednakowej pojemności oraz czwartego o pojemności dwa razy większej niż pozostałe (rys. 1). Znaleźć różnicę potencjałów między punktami A i B, przyjmując, że $\mathcal{E} = 12$ V.
Rozwiązanie na str. 2



Rys. 1

F 772. Kondensatory o pojemności $C_1 = 5$ μF oraz $C_2 = 10$ μF połączone są w układ pokazany na rysunku 2. Do punktów A i B podłączone jest napięcie $U = 16$ V. Znaleźć różnicę potencjałów między punktami D i F.
Rozwiązanie na str. 2



Rys. 2

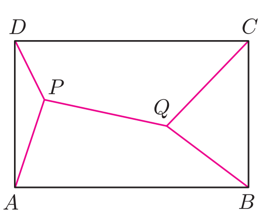
Redaguje Waldemar POMPE

M 1288. Każdy punkt prostej pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wykazać, że istnieją trzy różne punkty jednego koloru, z których jeden jest środkiem odcinka o końcach w dwóch pozostałych punktach.
Rozwiązanie na str. 7

M 1289. Punkty P i Q leżą wewnątrz prostokąta $ABCD$ o bokach $a > b$ (rys. 3). Wykazać, że

$$AP + DP + PQ + BQ + CQ \geqslant a + b\sqrt{3}.$$

Rozwiązanie na str. 6



Rys. 3

M 1290. Wyznaczyć wszystkie pary (p, q) liczb pierwszych spełniające równanie

$$p^2 - 2q^2 = 1.$$

Rozwiązanie na str. 24