mała delta

Parzyste-nieparzyste-wszystkie

Wybierz, drogi Czytelniku, dowolną liczbę naturalną. 182754? Proszę bardzo. Utwórzmy z niej nową liczbę w sposób następujący. Najpierw wypiszemy liczbę cyfr parzystych w zapisie dziesiętnym wybranej liczby, do niej dostawimy z prawej strony liczbę jej cyfr nieparzystych, na koniec dołączymy – też z prawej – łączną liczbę jej cyfr. W liczbie 182754 są 3 cyfry parzyste, 3 cyfry nieparzyste, a wszystkich cyfr jest 6, otrzymamy zatem liczbę 336. Powtórzmy to postępowanie dla tej nowej liczby: 1 cyfra parzysta, 2 nieparzyste, 3 cyfry – otrzymujemy liczbę 123 i na niej właściwie możemy zakończyć zabawę, bo następną liczbą będzie znowu 123.

Spróbujmy więc z inną liczbą, np. 99582731059. Cyfr parzystych 3 (bo przecież 0 jest cyfrą parzystą), cyfr nieparzystych 8, łącznie 11. Otrzymujemy zatem liczbę 3811, z niej liczbę 134, a dalej 123. Hmm... Może wybieramy za małe liczby? Zacznijmy jeszcze raz z dużą liczbą, na przykład $10^{100} + 235$. Jej zapis dziesiętny zaczyna się od jedynki, potem mamy 97 zer, a na końcu 235, zatem cyfr parzystych jest 98, nieparzystych 3, a wszystkich 101. Otrzymujemy liczbę 983101, z której powstaje liczba 246, z niej 303, a z niej... 123. Wygląda na to, że znikąd ratunku.

Oczywiście, metoda działa również dla liczb o mniejszej liczbie cyfr: na przykład 33 daje kolejno 22, 202, 303, 123.

Czy tak już będzie zawsze, dla dowolnej liczby naturalnej? Pomyślmy. Jeśli liczba naturalna n ma co najmniej 4 cyfry, to liczba otrzymana z n w opisany wyżej sposób ma mniej cyfr niż n (dlaczego?), zatem w kolejnych krokach otrzymujemy liczby o coraz mniejszej liczbie cyfr, aż dojdziemy do liczby co najwyżej 3-cyfrowej. Jeśli uznamy dla uproszczenia, że liczby 1- i 2-cyfrowe też są 3-cyfrowe (inaczej mówiąc, jeśli zgodzimy się dopisać do nich tyle zer na początku, żeby zapis zawierał 3 cyfry), to w pewnym momencie dojdziemy do liczby właśnie 3-cyfrowej. Jakie liczby 3-cyfrowe mogą się pojawić? Łatwo sporządzić listę takich możliwych liczb, pamiętając, że ich trzecia cyfra musi być równa 3, a jednocześnie musi być sumą pierwszych dwóch cyfr. A potem pozostaje już tylko sprawdzić, że z każdej takiej liczby dochodzi się – i to dość szybko – do liczby 123.

W podanych wyżej przykładach droga od wybranej liczby do liczby 123 nie była długa. Dla liczby 182754 musieliśmy wykonać dwa kroki, dla liczby 99582731059 potrzebowaliśmy trzech kroków, dla $10^{100} + 235$ czterech. Czy liczba kroków prowadzących do 123 jest zawsze mała? Czy w ogóle jest ograniczona? Czy dla każdej liczby naturalnej k istnieje taka liczba naturalna, że jej droga do 123 składa się z co najmniej k kroków?

I jeszcze jedno pytanie. Czy istnieje taki „punkt stały”, do którego zmierza każda liczba naturalna, jeśli rozpatrujemy nie podzielność przez 2 (parzyste-nieparzyste), lecz, na przykład, przez 3? Wtedy zapisywalibyśmy (od lewej) liczbę cyfr podzielnych przez 3, liczbę cyfr dających resztę 1 przy dzieleniu przez 3, liczbę cyfr dających resztę 2 przy dzieleniu przez 3, a na końcu liczbę wszystkich cyfr. A czy można uzyskać ten sam efekt, gdy zamiast podzielności przez 2 lub 3 będziemy zliczać cyfry ze względu na ich resztę z dzielenia przez dowolną (ustaloną) liczbę naturalną k?

Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL