delta
MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

Zadania Olimpiady Informatycznej będą opublikowane w *Delcie* 11/2010

Olimpiada

Zadania zawodów I stopnia Olimpiad: Astronomicznej, Fizycznej, Matematycznej oraz Matematycznej Gimnazjalistów 2010/2011

LIV Olimpiada Astronomiczna

Informacje regulaminowe

1. Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych.

2. Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne.

3. W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, **do 11 października 2010 r.**, rozwiązania 3 zadań dowolnie wybranych przez uczestnika spośród zestawu zawierającego 4 zadania.

4. Uczniowie, którzy przyślą rozwiązania zadań pierwszej serii, otrzymają do końca października bieżącego roku tematy drugiej serii zadań. Zadania obydwu serii będą również umieszczane na stronie internetowej: `http://planetarium.edu.pl`

5. Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, **do 15 listopada 2010 r.** Decyduje data stempla pocztowego. Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.

6. W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyżej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).

7. Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesłać za pośrednictwem szkoły pod adresem:

Komitet Główny Olimpiady Astronomicznej
Planetarium Śląskie
41-500 Chorzów, skr. poczt. 10

w terminach podanych w p. 3 i 5. Decyduje data stempla pocztowego.

8. Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukania danych należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.

9. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem. W nagłówku zadania o najniższej numeracji należy umieścić dodatkowo: pełną nazwę szkoły, jej adres, klasę i jej profil oraz adres prywatny (z kodami pocztowymi). Dodatkowo, do rozwiązań pierwszej serii zadań należy dołączyć na osobnej kartce następujące informacje: imię i nazwisko, rok urodzenia, nazwa szkoły wraz z jej imieniem, adres szkoły (z kodem pocztowym i nazwą województwa), klasa, profil klasy, adres prywatny (z kodem pocztowym), e-mail, nazwisko nauczyciela fizyki i astronomii oraz ewentualnie opiekuna przygotowującego do olimpiady.

10. Zawody II stopnia odbędą się **17 stycznia 2011 r.** Zawody III stopnia odbędą się w dniach **od 10 do 13 marca 2011 r.**

11. Powiadomienia o zakwalifikowaniu do zawodów kolejnych stopni otrzymają jedynie uczniowie awansujący.

12. O uprawnieniach w przyjmowaniu na wyższe uczelnie laureatów i finalistów olimpiady decydują senaty uczelni. Informacje na ten temat są umieszczane na ich stronach internetowych.

Pierwsza seria zadań zawodów I stopnia

1. Gwiazda *Fomalhaut* (α PsA), wokół której dostrzeżono planety, należy do najjaśniejszych gwiazd południowej półkuli nieba. Określ dla Twojej miejscowości:

1) na jakiej maksymalnej wysokości może być obserwowana ta gwiazda;
2) kiedy są najkorzystniejsze terminy obserwacji tej gwiazdy w bieżącym roku.

Niezbędne dane wyszukaj samodzielnie.

2. Meteoroid o masie 100 kg spada na Ziemię z odległości 5 promieni Ziemi. Sporządź wykres zależności siły grawitacyjnej działającej na ten obiekt od jego odległości od środka Ziemi. Korzystając z wykresu, oceń wzrost energii kinetycznej meteoroidu podczas tej zmiany wysokości. Przyjmij masę Ziemi $M = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg i promień Ziemi $R = 6{,}4 \cdot 10^{6}$ m.

3. Przemiana wodoru w hel, będąca przyczyną świecenia gwiazd, stanowi bardzo wydajne źródło energii. Wydajność tego źródła jest tak duża, że czasem powoduje pojawianie się różnych przesadnych porównań. Na przykład w jednym z popularnonaukowych czasopism znajdujemy zdanie: „Z litra bogatej w deuter wody można uzyskać tyle samo energii, co z supertankowca wypełnionego ropą". Sprawdź zasadność tego zdania. Potrzebne dane wyszukaj samodzielnie.

4. Tabelka podaje odległości od Słońca (w AU) oraz długości ekliptyczne λ pięciu planet i Słońca w chwili, gdy odległość Ziemi od Słońca wynosiła 1 AU. Oblicz, jakie są w tym momencie elongacje Ziemi z pozycji obserwatora znajdującego się na każdej z tych planet i określ z tych pozycji położenie Ziemi względem charakterystycznych konfiguracji ze Słońcem (koniunkcji, opozycji itp.).

obiekt	odległość	λ	obiekt	odległość	λ
Merkury	0,4	320°	Jowisz	5,0	78°
Wenus	0,7	36°	Saturn	9,5	168°
Mars	1,5	0°	Słońce	—	12°

Uwaga. Dla uproszczenia zakładamy, że orbity planet leżą w płaszczyźnie ekliptyki.

Zadania obserwacyjne

Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. datę, czas, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów. W przypadku zastosowania metody fotograficznej można dołączyć negatyw, fotografię, wydruk komputerowy zdjęcia lub plik na CD, DVD itp.

1. Korzystając z publikowanych efemeryd widoczności *ISS – Międzynarodowej Stacji Kosmicznej* (np. `www.heavens-above.com`), zaznacz na odpowiednich fragmentach mapy nieba dowolne dwa zaobserwowane tory przelotu stacji widoczne w Twojej miejscowości. Oszacuj współrzędne horyzontalne początku i końca obserwowanych przelotów. Podaj współrzędne miejsca obserwacji.

2. W dowolny sposób dokonaj pomiaru kątowej średnicy tarczy Księżyca i oblicz odległość Księżyca od miejsca obserwacji. Drugiego takiego pomiaru dokonaj w odstępie około tygodnia i porównaj otrzymane wyniki. Przyjmij, że średnica Księżyca wynosi 3476 km. Opisz metodę pomiaru.

3. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji prowadzonych w ostatnim roku.

Rozwiązanie jednego zadania obserwacyjnego należy nadesłać wraz z rozwiązaniami drugiej serii zadań zawodów I stopnia – do dnia 15 listopada 2010 r.

Zalecana literatura

- Obowiązujące w szkołach podręczniki do przedmiotów ścisłych.
- H. Chrupała, M. T. Szczepański, *25 lat olimpiad astronomicznych.*
- H. Chrupała, *Zadania olimpiad astronomicznych XXVI–XXXV* (w dwóch częściach).
- H. Chrupała, J. M. Kreiner, M. T. Szczepański, *Zadania z astronomii z rozwiązaniami.*
- J. M. Kreiner, *Astronomia z astrofizyką.*
- J. M. Kreiner, *Ziemia i Wszechświat – astronomia nie tylko dla geografów.*
- D. H. Levy, *NIEBO – Poradnik użytkownika.*
- *Słownik szkolny – Astronomia* (praca zbiorowa).
- *Encyklopedia szkolna – fizyka z astronomią* (praca zbiorowa).
- Atlas nieba. Obrotowa mapa nieba.
- Czasopisma: *Delta*, *Fizyka w Szkole*, *Świat Nauki*, *Urania – Postępy Astronomii*, *Wiedza i Życie.*

LX Olimpiada Fizyczna
Zadania zawodów I stopnia

Rozwiązania zadań I stopnia należy przesyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** w terminach:

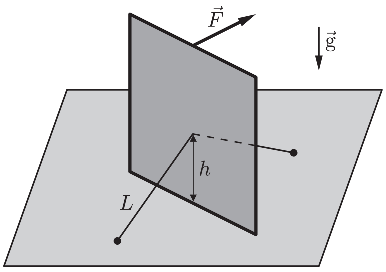
część I – do 15 października br., **część II – do 15 listopada br.**

O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II. Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć na stronie internetowej `www.kgof.edu.pl`

Część I

Uwaga: Rozwiązania zadań należy zamieścić w kolejności zgodnej z ich numeracją. Wszystkie strony pracy powinny być ponumerowane. Na każdym arkuszu należy umieścić: imię, nazwisko i adres autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać nazwę i adres szkoły, klasę oraz imię i nazwisko nauczyciela fizyki.

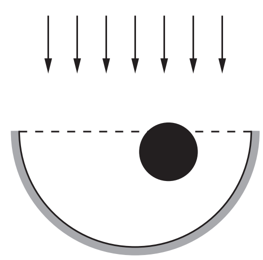
Podaj i krótko uzasadnij odpowiedź. Za każde z 15 zadań można otrzymać maksymalnie 4 punkty.



Rys. 1

1. Sztywna płyta stoi pionowo na podłodze. Aby unieruchomić ją w tej pozycji, postanowiono umocować ją za pomocą dwóch lin długości L każda (patrz rysunek 1). Niech F będzie prostopadłą do powierzchni płyty siłą przyłożoną do górnej krawędzi płyty, powodującą zerwanie jednej z lin. Na jakiej wysokości h liny powinny być przymocowane do płyty (dobierając przy tym odpowiednie miejsce zamocowania w podłożu), aby F było jak najmniejsze? Zakładamy, że liny są bardzo mało rozciągliwe i nie ulegają wyrwaniu ani z mocowania w podłożu, ani z mocowania w płycie. Wysokość płyty jest większa niż L, a jej dolna krawędź nie przesuwa się.

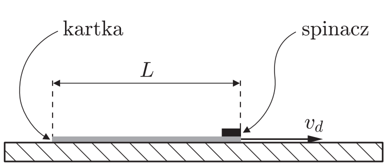
2. Mamy do dyspozycji idealne półsferyczne lustro o promieniu R (rysunek 2). Oś optyczna lustra jest ustawiona w kierunku Słońca. W którym miejscu należy umieścić czarną, metalową kulkę o promieniu $R/4$, aby jak najszybciej się ona nagrzała? Przyjmij, że promienie światła ze Słońca tworzą wiązkę równoległą.


Rys. 2

3. Na poziomym, długim stole leży kartka papieru długości L, a na kartce, tuż przy jej krótszej krawędzi, leży spinacz biurowy. Współczynnik tarcia między kartką a spinaczem wynosi μ. W pewnym momencie kartce nadajemy (w przybliżeniu natychmiastowo) prędkość v_d (patrz rysunek 3). Ile powinno wynosić v_d, aby nadać spinaczowi jak największą prędkość względem stołu? Rozmiary spinacza są małe w porównaniu z L.

4. Wokół pewnej planety krąży wielki wąż w pozycji pionowej (wzdłuż promienia poprowadzonego do planety), na stałej wysokości nad planetą. W pewnej chwili wąż zwinął się w niewielki kłębek. Czy jego orbita będzie kołowa, czy zacznie się on oddalać od planety, czy zbliżać do niej?

5. Gdy na pewną płytkę płasko-równoległą z bezbarwnego szkła pada prostopadle wiązka światła o natężeniu I_0, to natężenie wiązki przechodzącej wynosi $p \cdot I_0$, a wiązki odbitej $(1-p) \cdot I_0$. Jakie będzie natężenie wiązki przechodzącej przez dwie takie płytki, umieszczone równolegle jedna za drugą? W rozważanym przypadku nie występuje interferencja (wiązka nie jest koherentna).

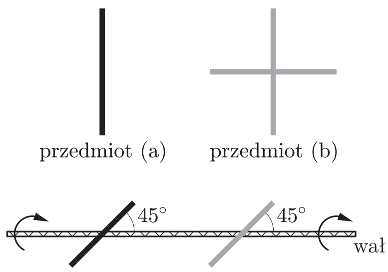


Rys. 3

6. Czy skacząc na bungee można zwiększyć minimalną odległość, na jaką zbliżymy się do ziemi, jeśli nasza prędkość początkowa będzie niezerowa? Przyjmij, że guma bungee spełnia prawo Hooka i pomiń opór powietrza.

7. Są ludzie, którzy twierdzą, że Elvis Presley nadal żyje. Podaj przykład obserwatora (jego odległość i prędkość wraz z kierunkiem i zwrotem), dla którego w chwili (mierzonej przez ciebie), gdy piszesz rozwiązanie tego zadania, jest to prawda. Przyjmij w przybliżeniu, że Elvis umarł w miejscu, w którym się znajdujesz. Potrzebne dane znajdź w dostępnych ci źródłach.

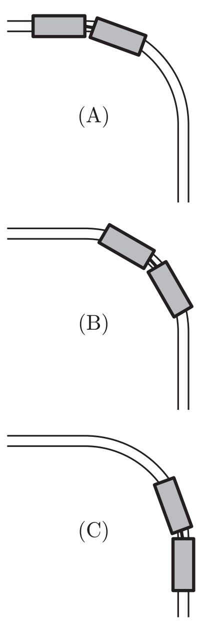
8. Działo elektromagnetyczne składa się z dwóch równoległych, odległych o d, poziomych, bardzo długich szyn, po których porusza się prostopadła do szyn, łącząca je metalowa belka o masie m. Szyny znajdują się w pionowym polu magnetycznym o natężeniu B. Jaka jest prędkość graniczna belki, jeśli do szyn podłączymy napięcie U? Pomiń opory ruchu belki.



Rys. 4

9. Rozważmy dwa przedmioty o takich samych masach (patrz rysunek 4): a) jednorodny pręt, b) tworzące krzyż dwa jednorodne pręty. Dla każdego z tych przedmiotów moment bezwładności względem osi przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do niego jest taki sam. Każdy z tych przedmiotów umocowano na cienkim wale, tworzącym z nim kąt 45° (patrz rysunek 4), a następnie zaczęto obracać wałem (i przedmiotami) ze stałą prędkością kątową. W przypadku którego przedmiotu moment siły, z jakim działa on na wał, jest większy?

10. Wszystkie linie kolejowe w Paflagonii są kręte. Koleje Paflagońskie korzystają z tego, stosując w swoich pociągach nowatorski system napędu: silniki zginają lub wyprostowują złącza międzywagonowe. W których momentach (patrz rysunek 5) silnik powinien działać w kierunku zgięcia, a w których – w kierunku wyprostowania złącza?



Rys. 5

11. Jaki jest maksymalny zasięg strzału na Księżycu pocisku wylatującego z działa z prędkością 1800 m/s? Potrzebne dodatkowe dane wyszukaj w dostępnych ci źródłach.

12. W pewnej odległości od ładunku punktowego q znajduje się mała, dielektryczna kulka. Jak zmieni się (ile razy wzrośnie/zmaleje) wartość siły elektrostatycznej działającej na tę kulkę, jeśli dwukrotnie wzrośnie wartość ładunku punktowego?

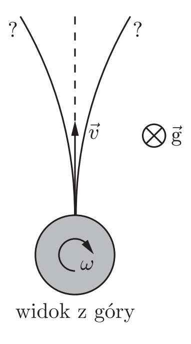
13. Jednorodnemu walcowi nadano pewną prędkość kątową wokół jego osi, a następnie nadano mu prędkość $\vec{v}$ wzdłuż podłogi (patrz rysunek 6). Zauważono, że jeśli wysokość walca nie jest mała w porównaniu z jego promieniem, to tor ruchu walca odchyla się w porównaniu z kierunkiem $\vec{v}$. W którą stronę i dlaczego? Podłoga jest pozioma, a walec styka się z nią podstawą. Pomiń wpływ powietrza, ale uwzględnij tarcie walca o podłogę.

14. Na małą kulkę metalową (średnicy np. 3 mm) skierowano wiązkę światła laserowego i obserwowano cień kulki na ekranie. Jeśli ktoś twierdzi, że widział jasny punkt w środku cienia, to dlatego, że: a) uległ złudzeniu optycznemu wynikającemu z kontrastu cienia z jasnym otoczeniem, b) w kulce musiał być niewielki otworek (kanalik), c) światło lasera jest tak silne, że wiązka przenika przez kulę, d) przyczyną zjawiska są zjawiska falowe – dyfrakcja i interferencja światła, e) przyczyną zjawiska jest poprzeczny charakter fali świetlnej i przejście polaryzacji liniowej w kołową.

15. W magazynie paliwa jądrowego znajdują się kule o identycznym promieniu i identycznej wadze, zawierające pluton pokryty pochłaniającą promieniowanie powłoką z ołowiu. Niektóre kule zawierają czysty izotop ^{238}Pu (okres połowicznego rozpadu 87,7 lat), a inne – czysty izotop ^{244}Pu (okres połowicznego rozpadu ponad 80 milionów lat). Niestety, oznaczenia na kulach się zagubiły. Jaka najprostsza metoda pozwoli na odróżnienie kul bez uszkadzania ochronnej warstwy ołowiu?

Część II

Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić: imię, nazwisko i adres autora pracy, nazwę i adres szkoły, klasę oraz imię i nazwisko nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.

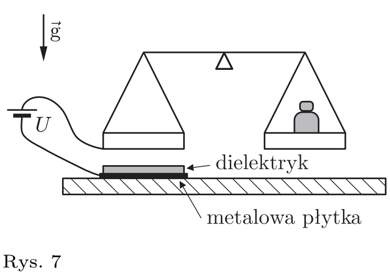


Rys. 6

Zadania teoretyczne

Przesłać należy rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

T1. Tomek posiada wagę laboratoryjną, ale zgubił do niej odważniki. Postanowił pod szalką umieścić metalową płytkę o promieniu r (równym promieniowi denka szalki) i podłączyć szalkę i płytkę do źródła o regulowanym napięciu (patrz rysunek 7). Aby nie dochodziło do zwarcia, Tomek przykleił do górnej powierzchni płytki warstwę dielektryka o grubości d_1 ($d_1 \ll r$) i stałej dielektrycznej ε_w. Gdy waga jest w położeniu równowagi, odległość między spodem szalki a dielektrykiem wynosi d_2 ($d_2 \ll r$). Jakie powinno być napięcie U, aby waga była w równowadze, gdy na drugiej szalce leży przedmiot o masie m? Podaj liczbową wartość U dla $r = 5$ cm, $d_1 = d_2 = 1$ mm, $m = 1$ g, $\varepsilon_w = 3$.



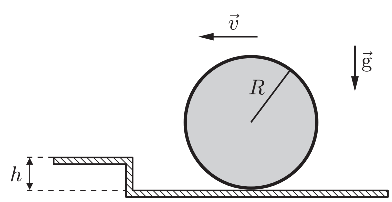
Rys. 7

Szalki są metalowe, a ich dno jest płaskie. Płytka pod szalką jest przymocowana do podłoża. Przyspieszenie ziemskie g = 9,8 m/s, przenikalność elektryczna próżni $\varepsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}$ F/m.

T2. W maszynie parowej woda o temperaturze początkowej $t_0 = 20°\mathrm{C}$ jest podgrzewana do temperatury $t_1 = 120°\mathrm{C}$, przy czym jej ciśnienie wzrasta do wartości $p_1 = 2{,}0 \cdot 10^5$ Pa. W temperaturze t_1 i ciśnieniu p_1 zachodzi przemiana wody w parę. Powstała para przesuwa tłok, a następnie jest wypuszczana do otoczenia o ciśnieniu $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa. Oblicz maksymalną sprawność tej maszyny w dwóch przypadkach:

a) para przesuwająca tłok ma stale ciśnienie p_1, a potem jest wypuszczana do atmosfery;
b) maszyna pracuje dwuetapowo: najpierw para przesuwa tłok jak w pkt. a), a następnie przesuwając tłok (ten sam lub inny – zależnie od rozwiązań konstrukcyjnych), ulega adiabatycznemu rozprężeniu, aż osiągnie temperaturę $t_w = 100°\mathrm{C}$, po czym wylatuje do atmosfery.

Ciepło parowania wody w temperaturze t_1 (i pod ciśnieniem p_1) wynosi $q_1 = 2{,}2 \cdot 10^6$ J/kg, ciepło właściwe wody jest równe $c_w = 4{,}2 \cdot 10^3$ J/(kg · K), ciepło właściwe pary wodnej przy stałym ciśnieniu $c_p = 2{,}0 \cdot 10^3$ J/(kg · K). Parę wodną potraktuj jako gaz doskonały. Uniwersalna stała gazowa jest równa $R = 8{,}3$ J/(mol · K).



Rys. 8

T3. Kulka o promieniu R, poruszająca się z prędkością v po poziomej podłodze, uderza w krawędź progu o wysokości h (patrz rysunek 8). Zderzenie jest doskonale sprężyste i trwa bardzo krótko. Jaki warunek (lub warunki) powinno spełniać v, aby kulka po uderzeniu w próg „wskoczyła” na znajdującą się za nim część podłogi, nie zderzając się powtórnie z krawędzią progu? Pomiń tarcie i opór powietrza. Sprawdź, czy ten warunek jest spełniony dla następujących wartości parametrów:

a) $R = 0{,}02$ m, $h = R/2$, $v = 1$ m/s;
b) $R = 0{,}02$ m, $h = R/4$, $v = 3$ m/s;
c) $R = 0{,}02$ m, $h = R/8$, $v = 0{,}5$ m/s;
d) $R = 0{,}04$ m, $h = R/16$, $v = 0{,}3$ m/s.

Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie $\mathrm{g} = 9{,}8$ m/s^2. Prędkość $\vec{v}$ jest prostopadła do krawędzi progu.

Uwaga: Gdy $h < R$, wygodnie jest wprowadzić taki kąt α, że $h = R(1 - \cos\alpha)$.

T4 (numeryczne). Statek piracki wystrzelił z armaty (falkonetu) w kierunku statku przeciwnika żelazną kulę o promieniu $r = 2{,}5$ cm. Zaraz po opuszczeniu lufy kula miała prędkość $v = 300$ m/s skierowaną pod kątem α do poziomu. Następnie kula poruszała się w powietrzu, a jedynymi siłami na nią działającymi były: stała siła grawitacji oraz siła oporu powietrza skierowana w kierunku przeciwnym do kierunku poruszania się kuli, o wartości proporcjonalnej do kwadratu prędkości

$$\vec{F}_R = -\frac{1}{2}\kappa S \varrho_p v^2 \frac{\vec{v}}{v},$$

gdzie $\vec{v}$ jest prędkością kuli, a κ – stałym współczynnikiem oporu aerodynamicznego, który dla kuli w przybliżeniu jest równy 0,45. S jest powierzchnią rzutu obiektu (kuli) na płaszczyznę prostopadłą do kierunku ruchu, ϱ_p – gęstością powietrza.

Posługując się komputerem (np. wykorzystując znany ci język programowania lub arkusz kalkulacyjny) lub programowalnym kalkulatorem, wyznacz kąt, przy którym zasięg strzału jest największy. Zastosuj poniższy schemat:

1. Zaproponuj dla tego problemu i uzasadnij schemat różnicowy oparty na metodzie Eulera (patrz Przykład) lub innej metodzie numerycznej.
2. Wykreśl tory dla $\alpha = 30°$, $\alpha = 45°$, oraz $\alpha = 60°$.
3. Wykreśl zależność zasięgu od kąta i na tej podstawie oszacuj kąt $\alpha_{\max}$, dla którego zasięg jest największy. Podaj ten zasięg.

Przyjmij gęstość żelaza $\varrho_{\mathrm{Fe}} = 7900$ kg/m^3 i powietrza $\varrho_p = 1{,}2$ kg/m^3, przyspieszenie ziemskie $\mathrm{g} = 9{,}8$ m/s^2. Punkt upadku kuli znajduje się na tej samej wysokości, co punkt jej wystrzelenia. Pomiń krzywiznę Ziemi.

Przykład. Algorytm różnicowy wykorzystujący schemat Eulera dla jednowymiarowego problemu spadku swobodnego z warunkami początkowymi $y(0) = h$ oraz $v(0) = 0$ jest następujący:
Dla małego Δt równania ruchu przybliżamy przez

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = v, \tag{1}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{F}{m} = -\mathrm{g}. \tag{2}$$

Stąd algorytm ma następującą postać:

- Inicjalizacja: $y_0 = h$, $v_0 = 0$.
- Krok algorytmu: dopóki $y_n > 0$, powtarzaj

$$y_{n+1} = y_n + v_n \Delta t, \tag{3}$$

$$v_{n+1} = v_n - \mathrm{g}\Delta t. \tag{4}$$

Powyższy schemat należy uogólnić na przypadek dwuwymiarowy i uwzględnić konkretną postać siły występującej w rozważanym zagadnieniu.

Teoretycznie dla odpowiednio małego Δt uzyskane w ten sposób rozwiązanie numeryczne dowolnie dokładnie przybliża rozwiązanie wyjściowego zagadnienia. Jednak komputer (lub kalkulator) przeprowadza obliczenia ze skończoną dokładnością i zbyt mała wartość Δt może być przyczyną dużych błędów. W praktyce długość kroku czasowego Δt można ustalić, np. żądając, by, po zmniejszeniu jej dwukrotnie, zmiany szukanych parametrów były w granicach z góry założonej dokładności (np. 1%). Poprawność schematu możesz sprawdzić na przykładzie rzutu ukośnego bez oporu.

Zadania doświadczalne

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) dowolnie wybranych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

D1. Siły oporów ruchu mogą mieć złożoną postać. Zbadaj, który związek najlepiej opisuje ruch roweru (z rowerzystą) jadącego po równej, twardej nawierzchni:

a) siła oporu nie zależy od prędkości $F_{\mathrm{op}}(v) = C$,
b) siła oporu jest proporcjonalna do prędkości $F_{\mathrm{op}}(v) = Av$,
c) siła oporu jest proporcjonalna do kwadratu prędkości $F_{\mathrm{op}}(v) = Bv^2$.

Wyznacz odpowiednią stałą dla zakresu prędkości 0–20 km/h. Możesz użyć:

- roweru z prędkościomierzem,
- kamery (np. w telefonie komórkowym),
- taśmy mierniczej,
- stopera.

Uwaga: Podczas pomiarów pamiętaj o bezpieczeństwie rowerzysty i innych osób.

D2. Woda jest przezroczysta w widzialnym zakresie widma, ale już w bliskiej podczerwieni silnie absorbuje promieniowanie elektromagnetyczne. Mając do dyspozycji:

- wysokie naczynie szklane (menzurkę, wazon) z wodą,
- linijkę,
- pilot od telewizora,
- aparat cyfrowy oraz program do obróbki zdjęć,

zbadaj zależność natężenia światła I_t, wysyłanego przez podczerwoną diodę pilota i przechodzącego przez wodę, od grubości warstwy wody L. Wyznacz współczynnik α we wzorze

$$I_t = I_0 \mathrm{e}^{-\alpha L}.$$

Uwaga: W typowym aparacie cyfrowym stosuje się korekcję skali natężenia – można przyjąć, że rejestrowana do pliku wartość sygnału $I_{\mathtt{PLIK}}$ jest związana z natężeniem światła padającego na piksel matrycy $I_{\mathtt{PIKSEL}}$ formułą

$$I_{\mathtt{PLIK}} = I_{\mathtt{PIKSEL}}^{0,7}.$$

D3. Plastikowa rura może działać jak „dźwiękowód”. Zbadaj, jak wygląda transmisja takiego „dźwiękowodu” w funkcji częstości fali akustycznej. Transmisja T jest zdefiniowana jako stosunek natężenia dźwięku na wyjściu $A_{\mathtt{out}}$ do natężeniu dźwięku na wejściu $A_{\mathtt{in}}$ „dźwiękowodu”:

$$T(\omega) = \frac{A_{\mathtt{out}}}{A_{\mathtt{in}}}.$$

Masz do dyspozycji:

- komputer z kartą dźwiękową podłączoną do głośnika i mikrofonu,
- program komputerowy `Generator` pozwalający wysyłać na wyjście karty dźwiękowej dowolne przebiegi napięcia,
- program komputerowy `Oscyloskop` pozwalający odczytywać przebiegi napięcia na wejściu mikrofonowym karty dźwiękowej,
- plastikową rurę (np. kanalizacyjną) o średnicy ok. 5 cm i długości ok. 2 m.

LXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

4 października 2010 r. – I seria,
4 listopada 2010 r. – II seria,
6 grudnia 2010 r. – III seria

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych oraz bieżące informacje, a także zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

1. Wyznaczyć wszystkie takie pary (a, b) liczb wymiernych dodatnich, że

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{4 + \sqrt{7}}.$$

2. Dane są liczby całkowite dodatnie m, n oraz d. Udowodnić, że jeżeli liczby $m^2n + 1$ i $mn^2 + 1$ są podzielne przez d, to również liczby $m^3 + 1$ i $n^3 + 1$ są podzielne przez d.

3. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD, zaś przekątne przecinają się w punkcie E. Wykazać, że prosta zawierająca dwusieczną kąta BEC jest prostopadła do prostej MN wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = BD$.

4. Dana jest liczba naturalna k. Dowieść, że z każdego zbioru liczb całkowitych, mającego więcej niż 3^k elementów, można wybrać $(k + 1)$-elementowy podzbiór S o następującej własności:

Dla dowolnych dwóch różnych podzbiorów A, B zbioru S suma wszystkich elementów zbioru A jest różna od sumy wszystkich elementów zbioru B. (Przyjmujemy, że suma elementów zbioru pustego wynosi 0).

II seria

5. Krawędzie dwunastościanu foremnego chcemy ponumerować liczbami $1, 2, \ldots, 30$, używając każdej z nich dokładnie raz. Rozstrzygnąć, czy można to uczynić tak, aby suma numerów krawędzi wychodzących z dowolnego wierzchołka była:
(a) parzysta;
(b) podzielna przez 4.

6. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^3 + b^3 + c^3.$$

Udowodnić, że

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^4 + b^2c^2 + c^4}} + \frac{b^3}{\sqrt{c^4 + c^2a^2 + a^4}} + \frac{c^3}{\sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4}} \geqslant \sqrt{3}.$$

7. Znaleźć wszystkie takie pary (a, b) różnych liczb całkowitych dodatnich, że liczba $b^2 + ab + 4$ jest podzielna przez liczbę $a^2 + ab + 4$.

8. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt K leży na boku BC i spełnia warunek $\sphericalangle BAM = \sphericalangle KAC$. Na odcinku AK wybrano taki punkt E, że $\sphericalangle BEK = \sphericalangle BAC$. Dowieść, że

$$\sphericalangle KEC = \sphericalangle BAC.$$

III seria

9. Wykazać, że dowolny czworokąt wypukły można rozciąć na 7 deltoidów.

10. Dane są różne nieparzyste liczby pierwsze p i q. Dowieść, że liczba $2^{pq} - 1$ ma co najmniej 3 różne dzielniki pierwsze.

11. W czworościanie rozważamy dwusieczne trzech kątów płaskich mających wspólny wierzchołek. Wykazać, że jeżeli pewne dwie z tych dwusiecznych są prostopadłe, to wszystkie one są wzajemnie prostopadłe.

12. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

VI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego

1 września 2010 r. – 25 października 2010 r.

Rozwiązania poniższych zadań należy zapisywać **jednostronnie** na **oddzielnych** arkuszach formatu A4. Na każdej kartce z rozwiązaniem należy podać następujące informacje:

- w prawym górnym rogu numer zadania,
- w lewym górnym rogu dane uczestnika: imię i nazwisko, adres domowy, adres e-mail, nazwa i adres szkoły, klasa.

Rozwiązania zadań należy przesłać do Komitetu Okręgowego, właściwego terytorialnie dla szkoły najpóźniej dnia 25 października 2010 r. (decyduje data stempla pocztowego). Adresy Komitetów Okręgowych, informacje o kwalifikacji do zawodów stopnia drugiego, terminy kolejnych etapów OMG oraz inne bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem `www.omg.edu.pl`

1. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + x(y-4) = -2, \\ y^2 + y(x-4) = -2. \end{cases}$$

2. W pewnym czworościanie każdy wierzchołek połączono odcinkiem ze środkiem okręgu opisanego na przeciwległej ścianie. Okazało się, że otrzymane odcinki są wysokościami czworościanu. Wykaż, że czworościan ten jest foremny.

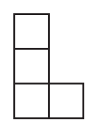
3. Udowodnij, że dla każdych dodatnich liczb a, b, c spełniona jest nierówność

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} > \sqrt{a+b+c}.$$

4. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Punkt X leży wewnątrz tego sześciokąta. Punkty K, L, M, N, P, Q są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DE, EF, FA. Wykaż, że suma pól czworokątów $QAKX, LCMX, NEPX$ nie zależy od wyboru punktu X.

5. W każde pole kwadratowej tablicy 100×100 wpisano liczbę rzeczywistą. Okazało się, że suma liczb wpisanych w każde cztery pola, które można nakryć L-tetraminem, jest równa 0. Wyznacz sumę liczb wpisanych w pola, które znajdują się na obu przekątnych tablicy.

Uwaga. *L-tetraminem* nazywamy figurę składającą się z czterech kwadratów o boku 1, ułożonych jak na rysunku obok. L-tetramina można obracać i odbijać symetrycznie.



6. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Jego przekątne przecinają się w punkcie E, a kąt BEC jest rozwarty. Prosta przechodząca przez punkt C i prostopadła do prostej AC przecina prostą przechodzącą przez punkt B i prostopadłą do prostej BD w punkcie F. Wykaż, że proste EF i AD są prostopadłe.

7. Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby nieparzyste a i b spełniające równanie

$$a^2 - b^3 = 4.$$