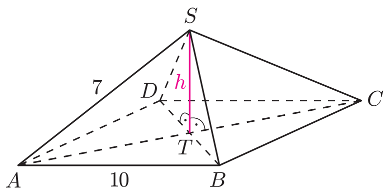
Oczywiste?

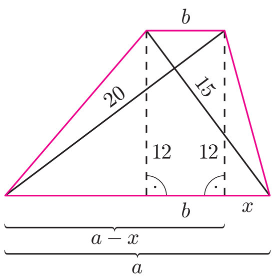
Joanna JASZUŃSKA

„Łatwo zauważyć, że pole koła nie może być liczbą całkowitą, bo π jest niewymierne."
„O godzinie 3:15 wskazówki zegara, oczywiście, pokrywają się."

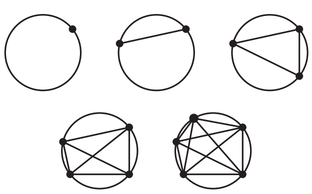
Na sugestywnie brzmiące bzdury można dać się nabrać, zwłaszcza gdy wypowiadane są z dużym przekonaniem. Warto zawsze czujnie weryfikować, czy takie pozornie „oczywiste" lub „łatwo widoczne" stwierdzenia w ogóle są prawdziwe.



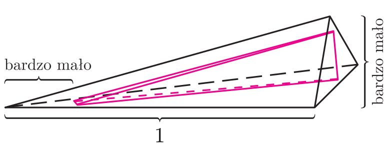
Rys. 1



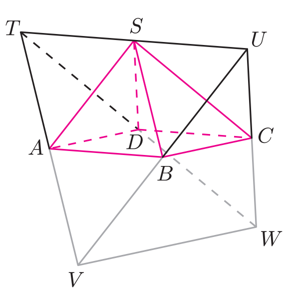
Rys. 2



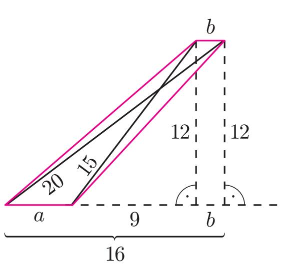
Rys. 3. L_n – liczba obszarów przy n punktach. $L_1 = 1$, $L_2 = 2$, $L_3 = 4$, $L_4 = 8$, $L_5 = 16$.



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Nieprawdziwe „oczywiste" rozumowania

1. Jeśli czworościan G znajduje się wewnątrz czworościanu F, to suma długości krawędzi czworościanu G nie przekracza sumy długości krawędzi czworościanu F.

2. We wsi A mieszka 100 dzieci, zaś we wsi B – 50 dzieci. W którym miejscu na drodze z A do B należy wybudować szkołę, aby dzieci, idąc do szkoły, pokonywały w sumie jak najmniejszą liczbę kilometrów?

R. Ponieważ w A mieszka dwukrotnie więcej dzieci niż w B, szkołę należy, oczywiście, wybudować w odległości dwukrotnie mniejszej od A niż od B.

3. Oblicz wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego z rysunku 1.

R. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat, wystarczy więc wyznaczyć długość połowy jego przekątnej i skorzystać z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SAT.

4. Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ są trójkątami równobocznymi. Na ścianach SAD i SBC zbudowano, na zewnątrz, czworościany foremne $SADT$ i $SBCU$. Otrzymana w ten sposób bryła ma, oczywiście, 9 ścian.

5. W porcie zacumowano łódkę. Z jej burty zwisa drabinka, której piąty od dołu szczebel jest dokładnie pod powierzchnią wody. Przypływ podwyższa poziom wody w tempie 30 cm/h. Każdy szczebel drabinki ma 2 cm grubości, odległość między kolejnymi szczeblami to 20 cm. Ile szczebli będzie pod wodą po 3 godzinach?

R. Łatwo policzyć: 3 godziny po 30 cm to 90 cm, każde 22 cm to kolejny przykryty szczebel, $90 = 4 \cdot 22 + 2$, więc po 3 godzinach pod wodą będzie łącznie 9 szczebli.

6. Oblicz pole trapezu o wysokości 12 i przekątnych o długościach 15 i 20.

R. Z twierdzenia Pitagorasa (rys. 2) mamy $a - x = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ oraz $b + x = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Stąd $a + b = 16 + 9 = 25$, więc $P = \frac{25}{2} \cdot 12 = 150$.

7. Na okręgu narysowano n punktów i wszystkie odcinki pomiędzy nimi. Jak widać (rys. 3), maksymalna liczba obszarów, na jaką mogą one dzielić koło, to 2^{n-1}.

8. Wiadomo, że jeśli środek okręgu opisanego jest na zewnątrz trójkąta, to jest on rozwartokątny. Oczywiście analogicznie, jeśli środek sfery opisanej jest na zewnątrz czworościanu, to któryś kąt dwuścienny jest rozwarty.

Wyjaśnienia i poprawne rozwiązania

R1. Jeśli oba czworościany z rysunku 4 są bardzo długie i chude, to suma długości krawędzi dla zewnętrznego jest około 3, zaś dla wewnętrznego – około 4. □

R2. Suma pokonywanych przez dzieci odległości to $100a + 50(AB - a) = 50(a + AB)$, gdzie a to odległość szkoły od wsi A. Suma ta jest minimalna dla $a = 0$, czyli szkołę należy wybudować we wsi A. □

R3. Taki ostrosłup nie istnieje, bo w trójkącie ACS zachodzi $AS + SC = 14 <$ $< 10\sqrt{2} = AC$. Proponowane obliczenia prowadzą do sprzeczności: $h^2 < 0$. □

R4. Otrzymana bryła ma 5 ścian. Punkty S, T, U są współliniowe; trójkąty STA, SAB i SBU leżą w jednej płaszczyźnie i sklejają się w jedną czworokątną ścianę $TABU$ (rys. 5), podobnie trójkąty SDT, SCD i SUC dają ścianę $UCDT$. Tę samą bryłę można też otrzymać, rozcinając czworościan foremny $TUVW$ płaszczyzną $ABCD$ przechodzącą przez środki czterech z jego krawędzi. □

R5. Pięć, tak jak było, bo poziom wody nie zmienia się względem łódki. □

R6. Trapez z rysunku 6 też spełnia warunki zadania, jego pole jest równe 42. □

R7. Dla $n = 6$ jest najwyżej 31 obszarów (co można policzyć na odpowiednim rysunku). Poprawny wzór na maksymalną liczbę obszarów to $1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$. □

R8. Czworościan $ABDA'$ w sześcianie o podstawie $ABCD$ i krawędzi AA' nie ma rozwartego kąta dwuściennego, a środkiem sfery opisanej jest środek sześcianu. □