Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2010

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 494 ($WT = 2{,}05$) i 495 ($WT = 2{,}58$) z numeru 3/2010

Michał Koźlik	Gliwice	40,72
Marian Łupieżowiec	Gliwice	36,55
Jacek Piotrowski	Rzeszów	31,84
Tomasz Rudny	Warszawa	31,68
Jerzy Witkowski	Radlin	30,54
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	29,57
Andrzej Idzik	Bolesławiec	17,94

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html`

Zadania z fizyki nr 502, 503

Redaguje Jerzy B. BROJAN

502. Stożkowe naczynie ma niewielki otwór w wierzchołku stożka i taki sam otwór w jego podstawie. Jeśli po nalaniu do pełna wody czas opróżnienia naczynia w pozycji wierzchołkiem do dołu jest równy t_1, to ile wynosi t_2 – czas opróżnienia w pozycji wierzchołkiem do góry?

503. Rurka U-kształtna ma pole przekroju poprzecznego $S_1 = 5\ \mathrm{cm}^2$, a jedno z jej ramion (o wysokości $l = 20$ cm) jest zamknięte, z otworkiem o powierzchni $S_2 = 3\ \mathrm{mm}^2$. Rurkę napełniono wodą do poziomu zamknięcia (rys. 1), następnie wprowadzono przez otworek powietrze, tak że poziom w otwartym ramieniu podniósł się o $h = 5$ cm, po czym pozwolono wodzie opaść.

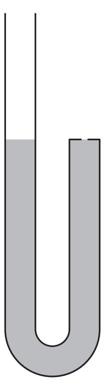
a) Na jaką wysokość H wytrysnęła woda przez otworek? Pominąć ściśliwość i lepkość wody, a także gęstość i lepkość powietrza.

b) Orientacyjnie oszacować wpływ czynników pominiętych w punkcie a) na wynik. Współczynnik ściśliwości wody jest równy $5 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{Pa}^{-1}$, lepkość wody wynosi $0{,}001\ \mathrm{kg/m \cdot s}$, lepkość powietrza – $1{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg/(m \cdot s)}$.

Współczynnikiem ściśliwości nazywamy wartość wyrażenia $-\Delta V/V\Delta p$, a lepkością – współczynnik η we wzorze

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = \eta\frac{\Delta v}{\Delta z},$$

gdzie ΔF jest siłą styczną działającą na jednostkę powierzchni ΔS cieczy, gdy wzdłuż osi prostopadłej do tej powierzchni prędkość cieczy zmienia się o Δv na odcinku Δz.



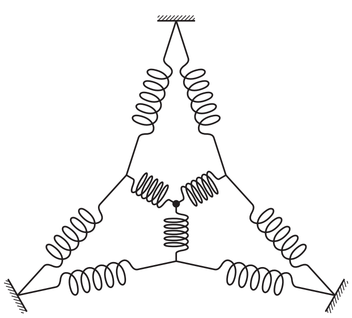
Rys. 1

Rozwiązania zadań z numeru 5/2010

Przypominamy treść zadań:

498. Trzy cienkie, początkowo nienaładowane, przewodzące sfery o promieniach r_1, r_2 i r_3 ($r_1 < r_2 < r_3$) są współśrodkowe, przy czym wewnętrzna i zewnętrzna są połączone przewodem przechodzącym przez otworek w środkowej sferze. Jakie ładunki wystąpią na tych dwóch sferach, jeśli na środkową wprowadzimy ładunek Q?

499. Zestaw 9 nieważkich sprężynek o stałej sprężystości k i długości swobodnej zero (tzn. przyjmujących długość l pod wpływem siły $F = kl$) jest rozpięty na trzech punktach leżących na tej samej wysokości i tworzących trójkąt równoboczny o boku a (rys. 2). O ile obniży się środkowy punkt zestawu po jego obciążeniu ciężarem P?



Rys. 2

498. Oznaczmy ładunek wewnętrznej sfery przez q (oczywiście ładunek zewnętrznej musi być równy $-q$). Ponieważ natężenie pola wytworzonego przez daną sferę jest wewnątrz niej równe zeru, a na zewnątrz jest takie, jak pole ładunku punktowego, więc w obszarze między r_1 a r_2 „rządzi” ładunek q, a różnica potencjałów (pomijając stałą $1/4\pi\varepsilon_0$) jest równa $q(1/r_1 - 1/r_2)$. W obszarze między r_2 a r_3 analogiczną rolę pełni suma ładunków q i Q, a różnica potencjałów wynosi $(q+Q)(1/r_2 - 1/r_3)$. Skoro zewnętrzna i wewnętrzna sfera są ze sobą zwarte, to suma tych wyrażeń musi być równa zeru. Stąd

$$q = -Q\frac{r_1(r_3 - r_2)}{r_2(r_3 - r_1)}.$$

499. W przypadku zerowej długości swobodnej sprężynek równania wiążące wektory ich długości z siłami naprężenia

$$\vec{F}_i = k\Delta\vec{r}_i$$

rozpadają się na niezależne układy równań dla składowych poziomych i pionowych. Zatem obciążenie nie przesuwa żadnego z węzłów w płaszczyźnie poziomej, a z drugiej strony przesunięcia węzłów w pionie można rozpatrywać tak, jakby trzy punkty zawieszenia zestawu się pokryły ($a = 0$). Ciężar P wisi na trzech sprężynkach, których rzut na oś pionową jest równy $P/3k$, a te z kolei na sześciu, dla których ten rzut wynosi $P/6k$. Łącznie szukane obniżenie jest więc równe $P/2k$.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2010

Zadania z matematyki nr 605, 606

Redaguje Marcin E. KUCZMA

605. Rozwiązać równanie $x^3 + x^2 = 16 + 2^y$ w liczbach całkowitych x, y.

606. Dany jest trójkąt ABC. Rozważamy punkt D, zmieniający swoje położenie na boku AB. Prosta styczna do okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD, rozłączna z odcinkiem AB, przecina odcinek CD w punkcie X. Udowodnić, że wszystkie uzyskane w ten sposób punkty X leżą na pewnym okręgu.

Zadanie 606 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2010

Przypominamy treść zadań:

601. Znaleźć wszystkie pary (n, p) dodatnich liczb całkowitych, w których p jest liczbą pierwszą, spełniające równanie $n^8 = p^5 + p^2 + n^2$.

602. Liczby dodatnie a, b, c są związane zależnością $bc + ca + ab = 1$. Dowieść, że

$$\frac{a\sqrt{bc}}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{bc}} + \frac{b\sqrt{ca}}{\sqrt{1+b^2}+\sqrt{ca}} + \frac{c\sqrt{ab}}{\sqrt{1+c^2}+\sqrt{ab}} \leqslant \frac{1}{a+b+c}.$$

601. Zadane równanie

$$n^8 - n^2 = p^5 + p^2$$

może być spełnione tylko przez liczby $p > n > 1$. Z postaci iloczynowej

$$n^2(n^3-1)(n^3+1) = p^2(p^3+1)$$

widać, że p^2 (kwadrat liczby pierwszej większej od 2) musi dzielić któryś z czynników lewej strony; zatem

$$p^2 \leqslant n^3 + 1.$$

Dostajemy oszacowanie

$$n^2(n^3-1) = \frac{p^2(p^3+1)}{n^3+1} \leqslant p^3 + 1 \leqslant (n^3+1)^{3/2} + 1;$$

wszelako dla $n \geqslant 3$ zachodzi nierówność przeciwna:

$$\frac{n^2(n^3-1)}{(n^3+1)^{3/2}+1} = \frac{n^{1/2}(1-n^{-3})}{(1+n^{-3})^{3/2}+n^{-9/2}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{3^{1/2}(1-3^{-3})}{(1+3^{-3})^{3/2}+3^{-9/2}} > 1.$$

Pozostaje wartość $n = 2$, która wraz z $p = 3$ daje jedyne rozwiązanie równania.

602. Oznaczmy trzy składniki wyrażenia po lewej stronie kolejno przez A, B, C oraz przyjmijmy $a + b + c = S$. Należy wykazać, że $S \cdot (A + B + C) \leqslant 1$.

Z danej w założeniu zależności wynika, że

$$S \cdot a = a^2 + ab + ac = a^2 + 1 - bc,$$

i wobec tego

$$S \cdot A = \frac{a^2+1-bc}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{bc}} \cdot \sqrt{bc} = \left(\sqrt{a^2+1} - \sqrt{bc}\right)\sqrt{bc} =$$
$$= \sqrt{(a^2+1)bc} - bc.$$

Analogicznie wyrażają się iloczyny $S \cdot B$, $S \cdot C$. Dodajemy te trzy równości i szacujemy uzyskane wyrażenie, korzystając z nierówności Cauchy'ego–Schwarza:

$$S \cdot \left(A + B + C\right) = \sqrt{(a^2+1)bc} + \sqrt{(b^2+1)ca} + \sqrt{(c^2+1)ab} - 1 \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{3} \cdot \sqrt{(a^2+1)bc + (b^2+1)ca + (c^2+1)ab} - 1 =$$
$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{abcS + 1} - 1.$$

Wystarczy teraz dowieść, że ta ostatnia liczba nie przekracza 1. Jest to równoważne nierówności $3abcS \leqslant 1$, którą uzasadniamy, na przykład, tak:

$$1 = (bc + ca + ab)^2 = (bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2 + 2abcS \geqslant$$
$$\geqslant bc \cdot ca + ca \cdot ab + ab \cdot bc + 2abcS = 3abcS.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 593 ($WT = 1{,}71$) i 594 ($WT = 1{,}71$) z numeru 1/2010

Adam Woryna	Ruda Śl.	47,14
Tomasz Wietecha	Tarnów	46,66
Marek Prauza	Poraj	43,76
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	42,35
Piotr Kumor	Olsztyn	36,74

Dwaj panowie na W: Adam Woryna właśnie wszedł do grona Weteranów; zaś Weteran Wielokrotny Tomasz Wietecha wykonał już osiem rund!