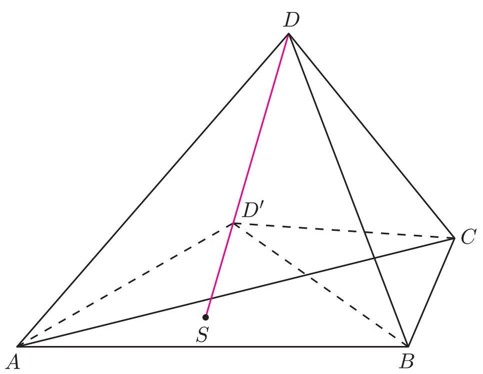
Kącik przestrzenny (4): Metoda objętości

Tym razem zajmiemy się dosyć prostą, a zarazem bardzo ważną metodą – metodą objętości. Jest to analog metody pól na płaszczyźnie. Przez $V(XYZT)$ będziemy oznaczać objętość czworościanu $XYZT$. Potrzebne będą dwa następujące fakty:

Fakt 1. *Punkt D', różny od D i nieleżący na płaszczyźnie ABC, leży wewnątrz lub na brzegu czworościanu $ABCD$. Prosta DD' przecina płaszczyznę ABC w punkcie S. Wtedy* (*rys.* 1)

$$\frac{V(ABCD')}{V(ABCD)} = \frac{D'S}{DS}.$$



Rys. 1

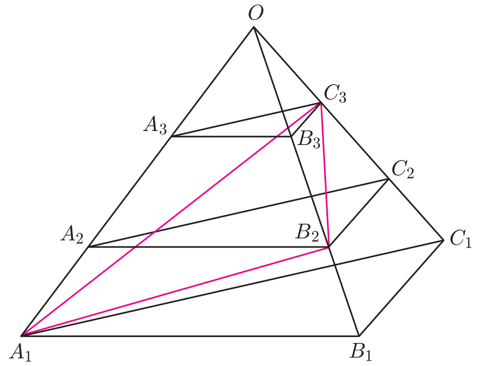
Fakt 2. *Dany jest czworościan $ABCD$ oraz punkty A', B', C' leżące na półprostych $DA^{\rightarrow}, DB^{\rightarrow}, DC^{\rightarrow}$. Wówczas*

$$\frac{V(A'B'C'D)}{V(ABCD)} = \frac{A'D\cdot B'D\cdot C'D}{AD\cdot BD\cdot CD}.$$

Nietrudny dowód faktu 1 i wyprowadzenie z niego faktu 2 pozostawiamy Czytelnikowi. Te dwa proste fakty mają szereg różnych zastosowań – zobaczmy kilka przykładów.

1. (OM 44-II-3) *Na krawędzi OA_1 czworościanu $OA_1B_1C_1$ wybrano punkty A_2, A_3, takie że $OA_1 > OA_2 > OA_3 > 0$. Punkty B_2, B_3 leżą na krawędzi OB_1, a punkty C_2, C_3 leżą na krawędzi OC_1, przy czym płaszczyzny $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ są równoległe. Niech V_i $(i = 1, 2, 3)$ oznacza objętość czworościanu $OA_iB_iC_i$, a V objętość czworościanu $OA_1B_2C_3$. Wykazać, że*

$$V_1 + V_2 + V_3 \geqslant 3V.$$



Rys. 2

Rozwiązanie. Niech $OA_1 = a_1$, $OA_2 = a_2$, $OA_3 = a_3$. Korzystając z faktu 2 i równoległości trzech danych płaszczyzn, otrzymamy

$$\frac{V_1}{V} = \frac{OB_1}{OB_2}\cdot\frac{OC_1}{OC_3} = \frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_1}{a_3}.$$

Analogicznie dostaniemy, że

$$\frac{V_2}{V} = \frac{a_2}{a_3}\cdot\frac{a_2}{a_1} \quad\text{oraz}\quad \frac{V_3}{V} = \frac{a_3}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}.$$

Dodając stronami i korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną, otrzymamy

$$\frac{V_1+V_2+V_3}{V} = \frac{a_1^2}{a_2a_3} + \frac{a_2^2}{a_3a_1} + \frac{a_3^2}{a_1a_2} \geqslant 3.$$

Mimo iż pozornie wydaje się, że nie ma tu nic trudnego, to polecam Czytelnikom rozwiązanie kilku tego typu zadań ze strony internetowej *Delty* – czasem naprawdę trzeba sporo sprytu, by móc zastosować fakt 2.

Metodę objętości można stosować nie tylko w jedną stronę, ale także w drugą: zamienić stosunki długości odcinków na stosunki objętości pewnych brył. Ten pomysł pozwala na rozwiązanie wielu z pozoru niełatwych zadań.

2. (OM 14-I-11) *Wewnątrz czworościanu $ABCD$ obrano punkt S. Proste AS, BS, CS, DS przecinają przeciwległe ściany czworościanu odpowiednio w punktach A', B', C', D'. Dowieść, że*

$$\frac{SA'}{AA'} + \frac{SB'}{BB'} + \frac{SC'}{CC'} + \frac{SD'}{DD'} = 1.$$

Rozwiązanie. Korzystając z faktu 1, otrzymamy

$$\frac{SA'}{AA'} = \frac{V(BCDS)}{V(ABCD)}.$$

Wyrażając analogicznie pozostałe ułamki, otrzymamy

$$\frac{SA'}{AA'} + \frac{SB'}{BB'} + \frac{SC'}{CC'} + \frac{SD'}{DD'} = \frac{V(BCDS)}{V(ABCD)} + \frac{V(CDAS)}{V(ABCD)} + \frac{V(DABS)}{V(ABCD)} + \frac{V(ABCS)}{V(ABCD)} = 1.$$

Gdybyśmy nie znali tej metody, zadanie to mogłoby nam sprawić dużo więcej problemów...

Zadania

3. (mOM 2001-III-3) *W czworościanie $ABCD$ obrano na krawędziach AD, DB, BC odpowiednio takie punkty K, L, M, że*

$$\frac{AK}{KD} = \frac{2}{3},\qquad \frac{DL}{LB} = \frac{3}{4},\qquad \frac{BM}{MC} = \frac{4}{5}.$$

Płaszczyzna KLM dzieli ten czworościan na dwa wielościany o objętościach V_1 i V_2. Wyznaczyć $\frac{V_1}{V_2}$.

4. (OM 52-III-2) *Dowieść, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz czworościanu foremnego o krawędzi 1 od jego wierzchołków jest nie większa niż 3.*

Więcej zadań na internetowej stronie *Delty*.

Michał KIEZA