Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

Spora część działań SEM jest związana z konkursami matematycznymi. Mamy świadomość, że nie powinny być one tylko sztuką dla sztuki, lecz środkiem służącym pobudzaniu aktywności uczniów i nauczycieli, wyławianiu uczniów o ponadprzeciętnych zdolnościach matematycznych oraz zachęcaniu ich do rozwijania tychże. Wiemy też o potrzebach ciągłych poszukiwań i prób, które – mamy nadzieję – będą przybliżały nas do coraz lepszych metod nauczania matematyki.

Na bieżąco pisaliśmy tutaj o kolejnych etapach olimpiad prowadzonych przez SEM w ostatnim roku: Olimpiadzie Matematycznej i Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów. Oba te konkursy mają swoją ustaloną pozycję i renomę. Są to konkursy elitarne, adresowane do uczniów, dla których matematyka jest pasją.

Grono uczniów, którzy mają uzdolnienia matematyczne, ale niekoniecznie o nich wiedzą, jest niewątpliwie znacznie szersze. SEM chciałoby dotrzeć również do nich. Jedną z możliwości stwarzają konkursy matematyczne. Teraz napiszemy o jednym z nich, w przyszłości również o innych.

W maju br. w Piotrkowie Trybunalskim, pod patronatem SEM, odbył się I Piotrkowski Konkurs Matematyczny. Jego celem było danie szansy uczniom szkół ponadgimnazjalnych, dla których zadania olimpijskie są jeszcze zbyt trudne, zmierzenia się z zadaniami trudniejszymi od typowych zadań szkolnych.

Konkurs był rozgrywany w dwóch kategoriach: dla uczniów klas, w których realizowany jest program w zakresie podstawowym (P), i klas, w których realizowany jest program w zakresie rozszerzonym (R).

W kategorii (P) najbardziej odbiegającym od typowo szkolnego było ostatnie zadanie finału:

Dany jest wielomian $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, którego współczynniki a, b, c, d są liczbami całkowitymi, przy czym $a \neq 0$. Rozstrzygnij, ile pierwiastków całkowitych może mieć wielomian W, jeżeli wiadomo, że iloczyn $W(0) \cdot W(1)$ jest liczbą nieparzystą.

I właśnie to zadanie sprawiło finalistom najwięcej kłopotu, choć do jego rozwiązania potrzebna jest tylko wiedza, jak zachowuje się parzystość i nieparzystość liczb całkowitych przy operacjach mnożenia i dodawania (no i inwencja).

Interesującym wyzwaniem dla uczestników konkursu w kategorii (R) okazało się zadanie geometryczne:

Na okręgu o środku O i promieniu $r = 5$ leżą (w podanej kolejności) punkty A, B, C, D, przy czym $AB = 10$, $BC = 3$, $CD = 3$. Oblicz długość odcinka AD.

Poprawnie rozwiązało to zadanie 11 uczestników finału i żadne dwa z tych rozwiązań nie były jednakowe. Uczniowie popisali się więc tutaj sporą kreatywnością, co dobrze świadczy o ich matematycznych możliwościach.

Finalistom kategorii (R) najwięcej problemów przysporzyło również ostatnie zadanie finału:

Dany jest wielomian $W(x) = (x-29)(x-5)(x-2010)$. Rozstrzygnij, ile jest wielomianów $P(x)$, dla których istnieje wielomian stopnia trzeciego $Q(x)$ taki, że równość $W(P(x)) = W(x) \cdot Q(x)$ jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej x.

Nikt nie rozwiązał tego zadania całkowicie poprawnie. Powody są chyba podobne, jak w przypadku kategorii (P) – chociaż należy przyznać, że to zadanie było istotnie trudniejsze od poprzedniego.

Oto jego rozwiązanie. Zauważmy, że jeśli $Q(x)$ jest takim wielomianem stopnia trzeciego, że dla pewnego wielomianu $P(x)$ mamy $W(P(x)) = W(x) \cdot Q(x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, to $W(P(x))$ jest wielomianem stopnia szóstego oraz $P(x)$ jest wielomianem stopnia drugiego. Ponadto miejsca zerowe wielomianu $W(x)$ są też miejscami zerowymi wielomianu $W(P(x))$. Ponieważ jedynymi miejscami zerowymi wielomianu $W(x)$ są 5, 29 i 2010, więc

$$W(P(5)) = W(P(29)) = W(P(2010)) = 0.$$

W efekcie wielomian $P(x)$ dla każdego z argumentów 5, 29 i 2010 przyjmuje jedną z wartości 5, 29 lub 2010. Na odwrót: jeśli $P(x)$ jest wielomianem stopnia drugiego, który dla każdego z argumentów 5, 29 i 2010 przyjmuje jedną z wartości 5, 29 lub 2010, to istnieje taki wielomian $Q(x)$ stopnia trzeciego, że $W(P(x)) = W(x) \cdot Q(x)$.

Zadanie sprowadza się więc do wyznaczenia liczby wielomianów stopnia drugiego, których wykresy zawierają punkty o współrzędnych $(5, a)$, $(29, b)$ oraz $(2010, c)$, gdzie każda z liczb a, b, c jest równa 5, 29 lub 2010. Wiadomo, że wykres wielomianu stopnia drugiego (parabola) nie może zawierać trzech punktów współliniowych i że dowolne trzy niewspółliniowe punkty, należące do wykresu wielomianu stopnia drugiego, wyznaczają jednoznacznie ten wielomian. Zatem liczba wielomianów, które spełniają warunki zadania, jest równa liczbie takich trójek (a, b, c), w których każde z a, b, c jest jedną z liczb 5, 29 lub 2010 i punkty $(5, a)$, $(29, b)$, $(2010, c)$ nie są współliniowe. Zauważmy, że punkty te są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy wyznaczającymi je trójkami są $(5, 5, 5)$, $(29, 29, 29)$, $(2010, 2010, 2010)$, $(5, 29, 2010)$.

W efekcie są $3^3 - 4 = 23$ wielomiany, które spełniają warunki zadania.

Konkurs wzbudził duże zainteresowanie. Przystąpiło do niego 184 uczniów z 12 piotrkowskich szkół. Do półfinału zakwalifikowało się 106 uczniów, a do finału 45.

Wyniki finału, zadania konkursowe oraz szkice ich rozwiązań można znaleźć na stronie `www.skm.piotrkow.pl/PKM-I/`