Orbity zamknięte w zagadnieniu trzech ciał

Andrzej PALCZEWSKI[*]

Ludzie od zawsze chcieli zrozumieć ruch ciał niebieskich. Odkrycie przez Newtona zasad dynamiki i prawa powszechnego ciążenia oraz powstały niemal jednocześnie rachunek różniczkowy pozwoliły wreszcie na realizację tego pragnienia. Już w roku 1710 Johann Bernoulli rozwiązał zadanie Keplera, czyli opisał ruch dwóch ciał przyciągających się siłą grawitacji. W naturalny sposób kolejnym problemem stało się rozwiązanie zagadnienia ruchu trzech ciał oddziałujących na siebie siłami grawitacyjnymi. Pierwsze rozwiązanie uproszczonej wersji tego problemu przedstawił w 1767 roku Leonhard Euler. Euler pokazał, że jeśli trzy ciała o skończonych masach są rozmieszczone w pewnej chwili na jednej prostej w odpowiednich odległościach (te odległości są skomplikowanymi funkcjami mas ciał) oraz nada im się właściwe prędkości początkowe, to ciała te będą się poruszały po położonych w jednej płaszczyźnie elipsach, przez cały czas leżąc na jednej prostej (oczywiście zmieniającej się w czasie). Odkryte przez Eulera trajektorie można podzielić na 3 typy odpowiadające różnym wzajemnym położeniom trzech ciał na prostej. Te orbity odkrył niezależnie w 1772 roku Joseph Louis Lagrange, dodając jeszcze 2 rodzaje orbit zamkniętych. Lagrange wykazał, że jeśli w chwili początkowej ciała znajdują się w wierzchołkach trójkąta równobocznego i zostaną im nadane odpowiednie prędkości początkowe, to będą się one poruszały po orbitach eliptycznych w taki sposób, że ich położenia będą zawsze tworzyły trójkąt równoboczny. W ten sposób znaleziono dwie dodatkowe klasy orbit (orbity Lagrange'a można podzielić na 2 typy: gdy ruch odbywa się zgodnie z ruchem wskazówek zegara oraz przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Przez następne 100 lat nie znaleziono żadnych nowych zamkniętych orbit dla zagadnienia trzech ciał.

[*]Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Postęp nastąpił dopiero, gdy Henri Poincaré zajął się tzw. ograniczonym zagadnieniem trzech ciał. Ograniczone zagadnienie polega na rozpatrywaniu ruchu ciała o pomijalnie małej masie w polu sił dwu ciał o niezerowych masach. W Układzie Słonecznym odpowiada to ruchowi komety w układzie Słońce-Jowisz, albo ruchowi sztucznego satelity w układzie Ziemia-Księżyc – w dalszym ciągu będziemy mówili, że te ciała to słońce, planeta i kometa. Problem istnienia orbit zamkniętych dla ograniczonego zagadnienia trzech ciał można łatwo opisać, jeśli założyć, że słońce i planeta wykonują ruch po orbitach kołowych wokół wspólnego środka ciężkości. Do takiego zagadnienia można wybrać obracający się układ współrzędnych, w którym słońce i planeta są nieruchome (w układzie tym opisane wcześniej 3 rodziny orbit Eulera i 2 rodziny orbit Lagrange'a redukują się do 5 punktów zwanych punktami libracji). Wokół słońca i planety powstaje wtedy obszar zwany obszarem Hilla, którego kształt zależy od pewnej stałej, zwanej stałą Jacobiego i będącej jedną z całek ruchu tego układu. Interesujący nas ruch komety powinien się wtedy odbywać wewnątrz obszaru Hilla. Dla dużych wartości stałej Jacobiego obszar Hilla złożony jest z dwóch rozłącznych owalnych części – jednej wokół słońca, drugiej wokół planety. Jeśli kometa jest w pobliżu słońca, to może się jedynie poruszać po orbitach zamkniętych wokół słońca. Jeśli jest w pobliżu planety, to po orbitach zamkniętych wokół planety. Przy mniejszych wartościach stałej Jacobiego rozłączne obszary wokół słońca i planety łączą się w jeden wspólny obszar. W takim obszarze ruch komety może być niezwykle interesujący: pewna liczba okrążeń słońca, potem ruch w kierunku planety i pewna liczba okrążeń planety, następnie powrót w pobliże słońca i krążenie wokół niego itd. Wreszcie dla małej wartości stałej Jacobiego obszar Hilla otwiera się na zewnątrz, co pozwala na ucieczkę komety z otoczenia układu słońce-planeta. Poruszanie się komety w zamkniętym obszarze Hilla nie oznacza jeszcze istnienia zamkniętych orbit. Już Poincaré wykazał, że w większości przypadków ruch komety będzie chaotyczny. Tylko dla dostatecznie małej masy planety Poincaré udowodnił istnienie zamkniętej orbity komety, przy czym okrąża ona wtedy jedynie słońce.

Dla ruchu słońca i planety po orbitach eliptycznych (czyli takich, jakie wynikają z rozwiązania zagadnienia dwóch ciał) istnienie zamkniętych orbit komety zostało wykazane przy założeniu dostatecznie małej masy planety przez Jürgena Mosera w 1953 roku (ruch wyłącznie wokół słońca). W 1963 roku Richard Arenstorf wykazał istnienie rozwiązań okresowych, w których kometa mogła krążyć jednocześnie wokół słońca i planety, wykonując skomplikowane pętle. Te wyniki udało się w latach siedemdziesiątych XX wieku rozszerzyć na przypadek komety o niezerowej, ale małej masie (Hadjidemetriou – dla orbit kołowych, Kammeyer – dla orbit eliptycznych) a także na przypadek, gdy ruch nie odbywa się na płaszczyźnie, ale w całej trójwymiarowej przestrzeni.

Badanie istnienia zamkniętych orbit dla zagadnienia trzech ciał zmieniło się zupełnie z chwilą pojawienia się szybkich komputerów. Już Arenstorf, pracując dla NASA i interesując się w rzeczywistości badaniem zamkniętych orbit dla ruchu satelity w układzie Ziemia-Księżyc, nie ograniczył się jedynie do wykazania, że dla dostatecznie małej masy Księżyca orbity takie istnieją. Przeprowadził on odpowiednie symulacje komputerowe dla rzeczywistych mas Ziemi i Księżyca i wykazał istnienie zamkniętych orbit w tym układzie. Lata siedemdziesiąte i osiemdziesiąte XX wieku przyniosły burzliwy rozwój symulacji komputerowych dla zagadnienia trzech ciał. Obecnie bez wielkiego trudu można znaleźć w sieci strony z apletami przedstawiającymi wizualizacje wielu rozwiązań zagadnienia trzech ciał (zwykle dwuwymiarowych).

Zagadnienie trzech ciał ciągle kryje w sobie wiele niespodzianek. Przykładem mogą być symulacje komputerowe, które w 1993 roku doprowadziły Crisa Moore'a do odkrycia nowych orbit zamkniętych: trzy ciała o jednakowych masach oddziałujące siłami grawitacyjnymi poruszają się po tej samej płaskiej krzywej w kształcie ósemki. Zaskakujące komputerowe symulacje Moore'a zostały w 2000 roku potwierdzone dowodem podanym przez Alaina Chencinera i Richarda Montgomery'ego.

Sieciografia, czyli obrazki:

[1] *Collection of remarkable three-body motions*
`htttp://faculty.ifmo.ru/butikov/Projects/Collection1.html`

[2] *Three body problem – Scholarpedia*
`http://www.scholarpedia.org/article/Three_body_problem`

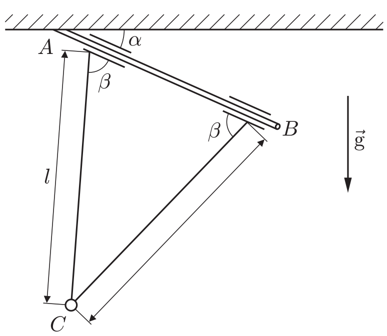
[3] *Restricted Three-Body Problem*
`http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/3body.htm`

[4] *Three Body Problem*
`http://astro.u-strasbg.fr/~koppen/body/ThreeBodyHelp.html`

To są strony o bardzo różnym charakterze: na przykład [3] to tylko obrazek (ale fantastyczny!), strona [4] wymaga trochę popracowania, aby umieć uruchomić aplety, ale za to pozwala eksperymentować każdemu, bo można samemu dobierać dane. Strona [1] zawiera 10 ciekawych orbit i już, a [2] (zrobiona przez wybitnego specjalistę z branży) pokazuje kilka naprawdę ciekawych obrazków, między innymi ruch w obszarze Hilla oraz trzy ciała, które się gonią po ósemce.

Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY



F 769. Wyznaczyć okres drgań ciężarka C, zamocowanego przegubowo dwoma lekkimi prętami o długości l do drążka AB, nachylonego pod kątem α do poziomu (rysunek). Przyjmujemy, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \beta$, tarcie zaniedbujemy.
Rozwiązanie na str. 24

F 770. Punkt zawieszenia wahadła matematycznego długości l wprawiono momentalnie w ruch poziomy ze stałą prędkością v. Po przemieszczeniu się tego punktu na odległość x został on znowu momentalnie zatrzymany. Dla jakiej prędkości v drgania wahadła, powstające na początku ruchu, zostaną zatrzymane zaraz po zakończeniu ruchu punktu zawieszenia? Przed rozpoczęciem ruchu wahadło było w spoczynku.
Rozwiązanie na str. 6

Redaguje Waldemar POMPE

M 1285. Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC. Punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA, AB. Wykazać, że suma długości odcinków AF, BD i CE nie zależy od wyboru punktu P.
Rozwiązanie na str. 24

M 1286. W lewe dolne pole szachownicy 8×8 wpisano liczbę -1, a w pozostałe pola liczbę 1. W jednym ruchu możemy zmienić znaki wszystkich liczb występujących w pewnej kolumnie lub wierszu. Rozstrzygnąć, czy można po skończonej liczbie takich operacji otrzymać w prawym górnym polu liczbę -1, a w pozostałych polach liczbę 1?
Rozwiązanie na str. 15

M 1287. Rozwiązać w liczbach całkowitych dodatnich równanie

$$x^3 - y^3 = xy + 61.$$

Rozwiązanie na str. 15