mała delta

Sprawiedliwa czy niesprawiedliwa?

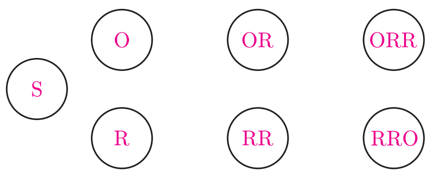
Rzucamy monetą. Jeśli wypadnie orzeł – wygrywam, jeśli reszka – wygrywa mój przeciwnik. Czy jest to gra sprawiedliwa? Uważam, że tak. A oto inna gra. Rzucamy kostką do gry. Jeśli wypadnie szóstka – wygrywa mój przeciwnik, jeśli co innego – wygrywam ja. W moim odczuciu ta gra jest niesprawiedliwa, niekorzystna dla mojego przeciwnika. Czy zgadzacie się ze mną? Jeśli tak, to w porządku, rozumiemy się doskonale.

Zaproponuję teraz inną grę. Rzucamy monetą wielokrotnie – aż do momentu, kiedy w kolejnych trzech rzutach wypadną trzy orły albo trzy reszki. W tym pierwszym przypadku wygrywam ja, w drugim mój przeciwnik. Zasady gry proste, choć na rozstrzygnięcie trzeba czasem czekać dość długo. Oto przykład rozgrywki rozstrzygniętej dopiero po dwunastu rzutach: OROORROROR RR – wygrał mój przeciwnik.

Czy jest to gra sprawiedliwa? Niewątpliwie tak. Spróbujmy jednak zmienić nieco jej przepisy. Ja będę czekał na taki ciąg kolejnych wyników: orzeł, reszka, reszka; mój przeciwnik natomiast wyczekuje rezultatu: reszka, reszka, orzeł. Rzucamy aż do skutku. Gra jest bardzo podobna do poprzedniej – radziłbym jednak dobrze się zastanowić, nim odpowiecie na pytanie, czy jest ona sprawiedliwa. A najlepiej wykonajcie eksperyment. Poszukajcie sobie cierpliwego partnera i rozegrajcie 40 partii, ostatecznie można nawet grać z samym sobą. Jeśli około 30 z nich przyniesie wygraną graczowi, który obstawił wynik ORR, to – uchylę Wam rąbka tajemnicy – nie będzie to przypadkiem. W tej grze szanse nie są równe. Spróbujmy jednak wydedukować: dlaczego?

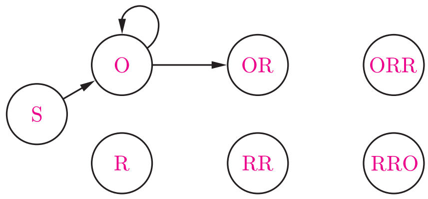
Dla porównania szans obydwu graczy przywołamy na pomoc interesującą i bardzo skuteczną metodę – przełożymy reguły naszej gry na język grafów.

Sądzę, że potrafię wyjaśnić Wam, o co chodzi. Wypiszmy kolejne rezultaty po drodze do sukcesu jednego z graczy: O, OR, ORR i drugiego: R, RR, RRO. Dorzućmy do tego sytuację przed wykonaniem pierwszego rzutu i oznaczmy ją S – jak start. Otrzymamy w ten sposób 7 stanów: O, OR, ORR, R, RR, RRO, S.



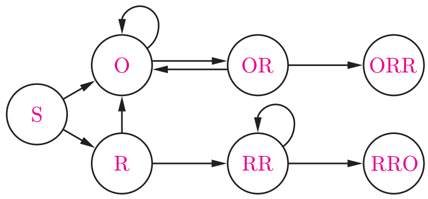
Teraz będziemy rysować między nimi strzałki. Zacznijmy od pierwszego wypisanego stanu, O. Wczujmy się dobrze w sytuację i wyobraźmy sobie, że gra dopiero się rozpoczęła, rzuciliśmy monetą raz i wypadł orzeł. Co może zdarzyć się dalej?

W drugim z kolei rzucie wypadnie orzeł lub reszka. Jeśli reszka, przejdziemy ze stanu O do stanu OR, natomiast jeśli wypadnie orzeł, powinniśmy przejść do stanu OO. Takiego stanu wprawdzie nie ma na naszej liście, ale też wcale nie jest on nam potrzebny. Z punktu widzenia dalszej rozgrywki sytuacja OO jest dokładnie taka sama, jak sytuacja O. Dlatego narysujemy dwie strzałki: pierwszą od stanu O do stanu OR i drugą od stanu O do tego samego stanu O



– nasz rysunek zaczyna przekształcać się w graf.

Ostatecznie, po narysowaniu wszystkiego, co może się zdarzyć, graf przybierze taką postać:



– sprawdźcie, czy wszystkie strzałki narysowane są poprawnie!

Mając do pomocy graf, nietrudno zorientować się w szansach obydwu graczy. Okazuje się, że wynik gry jest przesądzony po drugim, jeśli już nie po pierwszym rzucie. Dojść po strzałkach do stanu RRO – co odpowiada wygranej drugiego gracza – można tylko wtedy, gdy zarówno w pierwszym, jak i w drugim rzucie wypadnie reszka. Inne możliwości, a konkretnie: OO, OR i RO, nieuchronnie prowadzą do stanu ORR, a więc do wygranej gracza pierwszego. Można więc domyślać się, że szanse graczy będą w stosunku 3 : 1 na korzyść pierwszego z nich.

Że tak jest w rzeczywistości – przekonajcie się, przeprowadzając doświadczenie, które Wam zaproponowałem.

A na zakończenie mam dla Was kilka zadań.

Zadanie 1. Narysujcie odpowiedni graf i porównajcie szanse graczy w takiej grze: jeden z graczy obstawia wynik ROO, drugi RRO. Tak jak w poprzedniej grze, rzuca się monetą aż do skutku.

Zadanie 2. Jeden z graczy wybiera dowolny ciąg trzech kolejnych wyników rzutu monetą. Drugi z graczy wybiera dowolny inny. Tak jak poprzednio, rzuca się monetą aż do skutku. Czy wolelibyście wybierać swój ciąg jako pierwsi czy jako drudzy?

Zadanie 3. Spróbujcie narysować graf i porównać szanse graczy w takiej grze: rzucamy kostką do gry dopóty, dopóki nie wypadnie parzysta liczba oczek lub też 1 i 3 (obojętnie w jakiej kolejności i niekoniecznie pod rząd). Gdy najpierw zostanie wyrzucona liczba parzysta (przed wyrzuceniem 1 i 3), wygrywa gracz pierwszy, w przeciwnym przypadku – gracz drugi. Dla uniknięcia nieporozumień podam dwa przykłady rozstrzygniętych rozgrywek:
1, 1, 5, 4 – wygrał gracz pierwszy;
3, 5, 3, 1 – wygrał gracz drugi.

O grze Penneya pisaliśmy też w *Delcie* 2(405)/2008.

Przemysław NOWICKI, *Delta* 1(25)/1976