Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html`

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 589 ($WT = 2{,}29$) i 590 ($WT = 2{,}66$) z numeru 11/2009

Tomasz Wietecha	Tarnów	43,75
Witold Bednarek	Łódź	43,02
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,10
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,58

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2010

Przypominamy treść zadań:

597. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, spełniające równanie
$$f(xf(x)+f(y)) = f(x)^2 + y \qquad \text{dla } x,y\in\mathbb{R}.$$

598. Niech $M = \{1,2,\ldots,m^2\}$ (m jest ustaloną liczbą naturalną).

(a) Ile jest w zbiorze M podzbiorów niezawierających pary liczb, których różnica dzieli się przez m?
(b) Ile jest w zbiorze M podzbiorów niezawierających pary liczb, których różnica jest równa m?

597. Niech f będzie funkcją spełniającą zadane równanie. Biorąc $x=0$, dostajemy zależność
$$f(f(y)) = y + c^2,$$
gdzie $c = f(0)$. Zatem
$$f(f(-c^2)) = 0.$$
Podstawiając w równaniu $x = f(-c^2)$, stwierdzamy, że
$$f(f(y)) = y$$
dla wszystkich $y\in\mathbb{R}$.

Teraz zastępujemy w równaniu x przez $f(x)$:
$$f(f(x)f(f(x)) + f(y)) = f(f(x))^2 + y \qquad \text{dla } x,y\in\mathbb{R}.$$
Skoro zaś $f(f(x)) = x$, mamy równanie
$$f(xf(x)+f(y)) = x^2 + y \qquad \text{dla } x,y\in\mathbb{R}.$$
Odejmujemy je stronami od równania wyjściowego i otrzymujemy
$$(1)\qquad f(x)^2 = x^2 \qquad \text{dla } x\in\mathbb{R}.$$
Oznaczmy $b = f(1)$; oczywiście $b = \pm 1$. Podstawiając w wyjściowym równaniu $x=1$, uzyskujemy dla wszystkich $y\in\mathbb{R}$ związek
$$f(b+f(y)) = 1+y,$$
który po podniesieniu stronami do kwadratu i uwzględnieniu wzoru (1) daje równość
$$(b+f(y))^2 = (1+y)^2,$$
czyli
$$1 + 2bf(y) + f(y)^2 = 1 + 2y + y^2.$$
Ponownie korzystając z (1), dostajemy równość $bf(y) = y$; stała b jest równa 1 lub -1. Ostatecznie więc
$$f(y) = y \qquad \text{dla } y\in\mathbb{R}$$
lub
$$f(y) = -y \qquad \text{dla } y\in\mathbb{R}.$$
Każda z tych dwóch funkcji spełnia badane równanie.

598. (a) Liczby od 1 do m^2 ustawiamy w tabelę $m\times m$ (kolejno wierszami):
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ m+1 & m+2 & \ldots & 2m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m^2-m+1 & m^2-m+2 & \ldots & m^2 \end{bmatrix}$$
Podzbiór zbioru M spełnia żądany warunek (nie zawiera pary liczb o różnicy podzielnej przez m) wtedy i tylko wtedy, gdy jego przecięcie z każdą kolumną tej macierzy jest puste lub jednoelementowe. To daje $m+1$ możliwości dla każdej kolumny i w efekcie wynik: $(m+1)^m$.

(b) Podzbiór zbioru M spełnia wymagany w tym przypadku warunek (nie zawiera pary liczb różniących się dokładnie o m), gdy jego przecięcie z każdą kolumną wyznacza jej podciąg bez pary wyrazów kolejnych. Wiadomo (patrz niżej), że liczba takich podciągów wynosi F_{m+2}, gdzie (F_k) jest ciągiem Fibonacciego:
$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_k = F_{k-1} + F_{k-2};$$
wzór jawny
$$F_k = \frac{(1+\sqrt{5})^k - (1-\sqrt{5})^k}{2^k\cdot\sqrt{5}}.$$
Stąd wynik w przypadku (b): F_{m+2}^m.

[Dla kompletności pokażemy uzasadnienie faktu, na który powołaliśmy się. Niech E_m będzie liczbą podciągów ciągu $(1,\ldots,m)$ bez pary wyrazów kolejnych. Dla $m\geqslant 2$ każdy taki podciąg albo jest jednym z E_{m-1} „dobrych” podciągów ciągu $(1,\ldots,m-1)$, albo powstaje przez dołączenie pojedynczego wyrazu m do jednego z E_{m-2} „dobrych” podciągów ciągu $(1,\ldots,m-2)$. Stąd rekurencja $E_m = E_{m-1} + E_{m-2}$, która wraz z wartościami początkowymi $E_0 = 1 = F_2$, $E_1 = 2 = F_3$ daje tezę $E_m = F_{m+2}$.]

Klub 44

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2010

Przypominamy treść zadań:

494. Elektrony w metalu można – jak wiadomo – uważać za cząstki swobodne. Załóżmy, że w kawałku metalu poruszającym się z przyspieszeniem elektrony osiągają to samo przyspieszenie wskutek działania pola elektrycznego wytworzonego przez odpowiednie ładunki powierzchniowe. Obliczyć moc promieniowania kwadratowej płytki metalowej o boku $l = 5$ cm i grubości $d = 0{,}5$ cm, drgającej z amplitudą $A = 1$ cm i częstotliwością $f = 1$ kHz wzdłuż osi prostopadłej do płytki.

Wskazówka: Zgodnie z prawami elektrodynamiki w tzw. przybliżeniu dipolowym moc promieniowania dipola elektrycznego o momencie p jest równa

$$P = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t^2}\right)^2.$$

Momentem dipolowym układu dwóch ładunków $+q$ i $-q$ odległych o d nazywamy iloczyn qd.

495. Dwie półproste tworzą kąt 2α, którego dwusieczna jest pionowa. Wzdłuż tych półprostych mogą ślizgać się bez tarcia końce jednorodnego pręta o długości l. W którym przypadku poziome położenie pręta jest położeniem równowagi trwałej – gdy wierzchołek kąta jest na górze, czy gdy jest na dole? Dla przypadku równowagi trwałej podać wzór na częstotliwość małych drgań pręta wokół tego położenia.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 490 ($WT = 1{,}95$) i 491 ($WT = 2{,}60$) z numeru 1/2010

Krzysztof Magiera	Łosiów	44,15
Michał Koźlik	Gliwice	36,76
Tomasz Rudny	Warszawa	31,68
Jerzy Witkowski	Radlin	25,70
Tomasz Wietecha	Tarnów	14,82

Pan Magiera zdobył 44 punkty po raz drugi.

494. Natężenie pola, które nadaje elektronom przyspieszenie a, wynosi

$$E = ma/e,$$

gdzie m – masa elektronu, e – ładunek elementarny. Na ściankach płytki powstają więc ładunki

$$\pm q = \pm\varepsilon_0 l^2 E = \pm\varepsilon_0 l^2 ma/e.$$

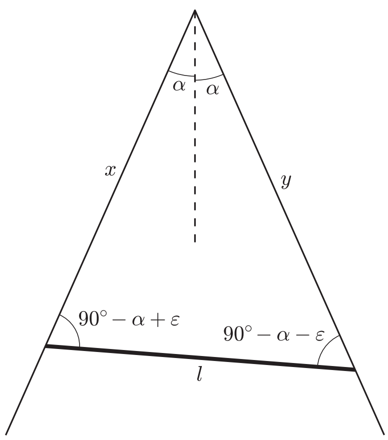
Moment dipolowy płytki wynosi

$$p = qd = \varepsilon_0 l^2 dma/e,$$

a przyspieszenie jest opisane wzorem $a = \omega^2 A\sin\omega t$, gdzie $\omega = 2\pi f$. Wyrażenia te należy podstawić do podanego wzoru na moc i uśrednić względem czasu. Ponieważ średnią wartością $\sin^2\omega t$ jest $1/2$, więc

$$\overline{P} = \frac{\varepsilon_0}{12\pi c^3}\left(\frac{l^2 dm\omega^4 A}{e}\right)^2 = 1{,}1\cdot 10^{-44}\ \mathrm{W}.$$

Jak można było oczekiwać, jest to wielkość o wiele rzędów wielkości za mała, aby efekt dało się zaobserwować.



495. Przyjmijmy, że wierzchołek kąta jest na górze i oznaczmy kąt odchylenia pręta od poziomu jako ε (rysunek). Z twierdzenia sinusów możemy wyznaczyć odległości końców pręta od wierzchołka:

$$x = \frac{l}{\sin 2\alpha}\cos(\alpha+\varepsilon),$$
$$y = \frac{l}{\sin 2\alpha}\cos(\alpha-\varepsilon).$$

Zmiana tych wielkości w porównaniu z położeniem równowagi jest równa

$$\Delta x = x_0 - x = \frac{2l}{\sin 2\alpha}\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right),$$
$$\Delta y = y - y_0 = \frac{2l}{\sin 2\alpha}\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Środek pręta przesunie się w pionie o

$$\Delta h = \frac{1}{2}(\Delta x - \Delta y)\cos\alpha = l\,\mathrm{ctg}\,\alpha\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$$

ze zwrotem w stronę wierzchołka, zatem ustawienie wierzchołkiem do góry odpowiada równowadze trwałej.

Dla małych ε mamy

$$\Delta E_{\mathrm{pot}} = mg\Delta h = mgl\,\frac{\varepsilon^2}{4}\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Energia kinetyczna jest – z dokładnością do wyrazów proporcjonalnych do $\dot\varepsilon^2$ – sumą energii ruchu środka masy wzdłuż osi poziomej i energii kinetycznej ruchu obrotowego wokół środka masy

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{poz}}^2 + \frac{1}{2}I\dot\varepsilon^2,$$

gdzie I jest momentem bezwładności. Obliczamy przesunięcie poziome środka masy

$$\frac{1}{2}(y-x)\sin\alpha = \frac{1}{2}l\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\varepsilon,$$

czyli w przybliżeniu liniowym

$$v_{\mathrm{poz}} = \frac{1}{2}l\dot\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

i po podstawieniu $I = \frac{1}{12}ml^2$ dochodzimy do

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{8}ml^2\left(\mathrm{tg}^2\alpha + \frac{1}{3}\right)\dot\varepsilon^2.$$

Z warunku $E_{\mathrm{pot}} + E_{\mathrm{kin}} = \mathrm{const}$ wynika szukany wzór na częstotliwość

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{l(\mathrm{tg}^2\alpha + 1/3)}}.$$