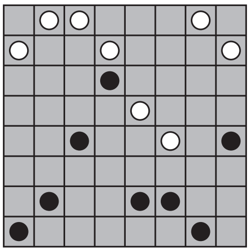


Rys. 3. Przykładowa sytuacja w grze Northcotta. Jest to sytuacja wygrywająca, gdyż $5 \oplus 5 \oplus 3 \oplus 0 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 6 \oplus 2 = 4$.

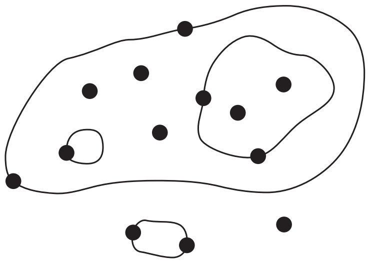
Tato wyjął planszę do warcabów i rozstawił na niej po osiem pionków, tak by w każdej kolumnie planszy znajdowało się dokładnie po jednym pionku każdego koloru (rys. 3).

– Ty ruszasz się białymi, ja czarnymi. Można ruszyć się do przodu lub do tyłu o dowolną liczbę pól, ale nie można przeskoczyć pionka przeciwnika. Znów przegrywa ten, kto nie ma ruchu. Spróbuj znaleźć strategię!

Po rozegraniu kilku partii Bartek nieśmiało zaczął:

– Wydaje mi się, że wpadłem na pomysł. To, co jest ważne na planszy, to odległości między przeciwległymi pionkami. Jeśli wszystkie są równe zeru, to gracz, który wykonuje następny ruch, przegra. Każdy ruch do przodu zmniejsza jedną z tych odległości. Jeśli zatem potraktujemy każdą z odległości jak stos, to będziemy mieli naszą poprzednią grę! Nie bardzo jednak wiem, co zrobić z ruchami do tyłu.

– Nic, one w niczym nie zmieniają sytuacji. Zauważ, że jeśli jestem w sytuacji wygrywającej, to nie potrzebuję ich używać. Natomiast gdy w sytuacji przegrywającej cofnę się o kilka pól, to przeciwnik, wykonując ruch w przód o tyle samo pól, przywróci poprzednią sytuację. I, oczywiście, nie mogę cofać się tak w nieskończoność.



Rys. 4. Przykładowa sytuacja w grze Rims. Jest to sytuacja przegrywająca, gdyż $3 \oplus 2 \oplus 1 = 0$.

– Racja! – ucieszył się Bartek. – Zatem moja strategia będzie z powodzeniem działać i w tej grze. A znasz jeszcze inne takie gry, Tato? Na wypadek, gdyby bratu Marcina i tę grę udało się rozgryźć?

– Niech pomyślę – odparł Tato i wyjąwszy długopis i kartkę, narysował na niej kilka kropek i krzywych (rys. 4). – Teraz ruch polega na narysowaniu zamkniętej krzywej, która przechodzi przez co najmniej jeden punkt i nie przecina innych krzywych.

– To proste – zawołał Bartek. – Jeśli potraktujemy wszystkie punkty, które leżą w tej samej części kartki, jako stos, to wykonując ruch, zabieram ze stosu te punkty, przez które przechodzi krzywa.

– Prawie dobrze – pochwalił Tato. – Zauważ jednak, że zamykając krzywą, dzielisz tę część kartki na dwa kawałki i część kropek możesz zamknąć w krzywej, a część pozostawić na zewnątrz. Odpowiadałoby to zabraniu zapałek ze stosu i ewentualnemu podzieleniu go na dwa mniejsze stosy.

Pokażemy, że dodatkowe ruchy w grze Rims nie pozwalają przejść z jednej sytuacji przegrywającej bezpośrednio do innej. Gdyby tak było, to moglibyśmy podzielić stos a_1 na dwa stosy x, y spełniające $x + y < a_1$ oraz

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n = 0,$$

$$x \oplus y \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n = 0.$$

Nim-sumując stronami, dostajemy

$$a_1 \oplus x \oplus y = 0,$$

czyli $a_1 = x \oplus y$. Korzystając z faktu, że $x \oplus y \leqslant x + y$ (bo ignorujemy przeniesienia), dochodzimy do sprzeczności:

$$a_1 = x \oplus y \leqslant x + y < a_1.$$

– Rzeczywiście – zamyślił się Bartek.

– Ale trop był dobry. Okazuje się, że tak jak w poprzedniej grze, te dodatkowe ruchy nie mają znaczenia.

* * *

– Tato! Ten brat Marcina naprawdę zaczyna mnie denerwować. Znowu wpadł na strategię. Czy nie miałbyś czegoś naprawdę trudnego?

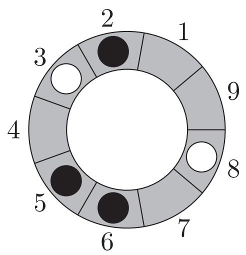
– Myślę, że miałbym. Ale to temat na osobną historię.

Opisana w artykule gra nosi nazwę Nim, a jej dwa warianty to gra Northcotta i Rims. Zachęcamy Czytelników do samodzielnego tworzenia nowych wariantów, natomiast zainteresowanych odpowiedzią Taty Bartka zapraszamy do lektury informatycznego kącika olimpijskiego.

Informatyczny kącik olimpijski (32): Gra w kółko

Tym razem w kąciku omówimy jedno z zadań z Potyczek Algorytmicznych 2009.

Plansza do gry „w kółko” składa się z pewnej liczby pól umieszczonych na okręgu. Na planszy rozmieszczone są białe i czarne pionki, na każdym polu co najwyżej jeden. Począwszy od grającego pionkami białymi, gracze na przemian wykonują ruchy na planszy. Ruch polega na przesunięciu wybranego pionka swojego koloru o dowolną liczbę niezajętych pól. Przykładowo, na zaprezentowanej na rysunku planszy grający białymi może wykonać ruch pionkiem z pola 3 na pole 4 lub pionkiem z pola 8 na jedno z pól 7, 9, 1.

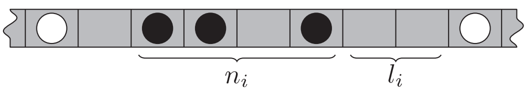


Przykładowa sytuacja w grze w kółko.

Jeśli w swojej turze gracz nie może wykonać żadnego ruchu, przegrywa. Naszym zadaniem jest sprawdzić, przy założeniu, że gracze grają optymalnie, który z nich wygra. Może się zdarzyć i tak, że gra będzie toczyła się w nieskończoność – uznajemy wtedy, że nastąpił remis.

Okazuje się, że gra „w kółko” ma wiele wspólnego z grą Nim, w związku z czym będziemy u Czytelników zakładali jej znajomość (o grze Nim piszemy też w artykule *Gra o wielu obliczach* na stronach 8–10 tego numeru *Delty*). Poniżej przedstawiamy szkic rozwiązania, zachęcając Czytelników do uzupełnienia szczegółów dowodu.

Obszarem nazwiemy spójny łuk planszy, którego pola końcowe są zajęte przez pionki, i w którym wszystkie pionki należą do jednego gracza. *Blokiem* nazwiemy obszar, którego nie można powiększyć. Liczbę pionków w bloku nazwiemy jego *licznością*, a liczbę pól w bloku jego *długością*. *Dziurą* nazwiemy przestrzeń między blokami, jej długość to liczba pól. Poniższy blok czarnych pionków ma liczność 3, długość 4, a za nim znajduje się dziura długości 2.



Jeśli plansza zawiera N bloków, to jej *zapisem blokowym* nazwiemy N trójek (p_i, n_i, l_i), gdzie p_i, n_i oznaczają liczność i długość i-tego bloku, natomiast l_i oznacza długość dziury po i-tym bloku. Powyższy blok to $(3, 4, 2)$. Zapisem blokowym planszy z przykładu (gdy zaczniemy od pola 2 i będziemy poruszać się w kierunku wzrastających numerów pól) jest $(1, 1, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 1), (1, 1, 2)$.

Załóżmy, że każdy z graczy ma co najmniej jeden pionek. Łatwo zauważyć, że jeśli nie ma wolnych pól na planszy, to czarny wygrywa. Ponadto, jeśli wszystkie bloki mają liczność 1, to jest remis, a gdy jeden z graczy ma tylko bloki liczności 1, to przegrywa. Dalej będziemy zakładać, że każdy z graczy ma co najmniej jeden blok o liczności większej niż 1.

Załóżmy wpierw, że wszystkie bloki mają liczność 2, i niech s będzie, zdefiniowaną na stronie 9, nim-sumą z wszystkich długości dziur, tzn.

$$s = l_1 \oplus l_2 \oplus \ldots \oplus l_N.$$

Kluczową obserwacją, która pozwoli nam rozgrywać gry na bardzo dużych planszach, jest zauważenie, że jeśli $s = 0$, to wygrywa czarny, w przeciwnym przypadku wygrywa biały. Istotnie, nasza gra to po prostu Nim: każda dziura odpowiada stosowi, tak jak to było w przypadku gry Northcotta.

Sprawa komplikuje się, gdy dopuścimy bloki o licznościach różnych od 2. Załóżmy teraz, że liczności bloków są większe od 1. *Silnym blokiem* nazwiemy blok o liczności co najmniej 3 i długości większej niż jego liczność ($3 \leqslant p_i < n_i$). Blok z rysunku powyżej jest silny. Zauważmy, że gracz mający silny blok ma zawsze możliwość ruchu pionkiem wewnątrz tego bloku; wynika z tego, że nie może przegrać (zatem jeśli obaj gracze mają silne bloki, to jest remis). Tak więc jeśli chcemy mieć szansę na wygraną, nie możemy dopuścić, by przeciwnik, który nie ma silnego bloku, uformował go.

Załóżmy, że rozważamy pierwszy ruch białych. Niech i_B oznacza liczbę białych pionków, dla których istnieje ruch formujący silny blok (analogicznie definiujemy i_C). Rozważmy trzy przypadki.

1) Czarny ma silny blok lub $i_C > 1$, zatem biały nie jest go w stanie zablokować. Jeśli biały ma silny blok lub $i_B > 0$, to jest remis, w przeciwnym przypadku czarny wygra.

2) $i_C = 0$, zatem biały wygrywa, jeśli ma silny blok lub $i_B > 0$. W przeciwnym przypadku wygrywa czarny lub biały w zależności od wartości s.

3) $i_C = 1$, zatem aby wygrać, biały musi wykonać ruch blokujący. Rekurencyjnie sprawdzamy (rozważając odpowiedź gracza czarnego, powtarzamy całe rozumowanie dla odwrotnego pokolorowania pionków), czy po tym ruchu gra kończy się zwycięstwem białych. Jeśli nie, to zamiast tego ruchu próbujemy utworzyć silny blok (to da białemu remis). Jeśli się nie uda, to wygrywa czarny. Zauważmy, że zawsze będą co najwyżej dwa dodatkowe wywołania rekurencyjne powyższej procedury.

Pozostało uwzględnić bloki o liczności 1. *Superblokiem* nazwiemy grupę sąsiednich bloków

$$(p_i, n_i, l_i), \ldots, (p_{i+k}, n_{i+k}, l_{i+k}),$$

z których wszystkie są liczności 1, oprócz skrajnych bloków i, $i+k$, które są liczności co najmniej 2. Poniższe obserwacje pozwolą nam sprowadzić grę do przypadku, w którym nie ma bloków liczności 1:

1) Superblok dla parzystego k jest równoważny pojedynczemu blokowi (p, n, l_{i+k}), gdzie

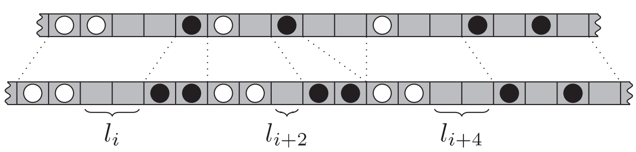
$$p = \sum_{j=i}^{k+i} p_j, \qquad n = \sum_{j=i}^{k+i} n_j + \sum_{j=i}^{k+i-1} l_j.$$

Innymi słowy, możemy zastąpić wszystkie pionki superbloku pionkami koloru bloków i oraz $i+k$. Wynika to z faktu, że gracz kontrolujący oba końce superbloku jest w stanie zdusić pojedyncze pionki przeciwnika, które są w środku.

2) Superblok dla nieparzystego k można przekształcić równoważnie, przyjmując

$$\begin{cases} p_{i+j} = 2 & \text{dla } 1 \leqslant j < k, \\ l_{i+2j-1} = 0 & \text{dla } 1 \leqslant j \leqslant k/2. \end{cases}$$

Wynika to z faktu, że graczowi kontrolującemu lewy koniec superbloku opłaca się przesuwać pionki tylko w prawo (analogicznie drugiemu graczowi opłaca się przesuwać pionki jedynie w lewo). Zatem tę sytuację znów możemy sprowadzić do gry Nim, tym razem jednak stosami będą co drugie dziury:



Uważna implementacja powyższego rozwiązania daje algorytm działający w czasie liniowym ze względu na liczbę pionków na planszy.

Tomasz IDZIASZEK