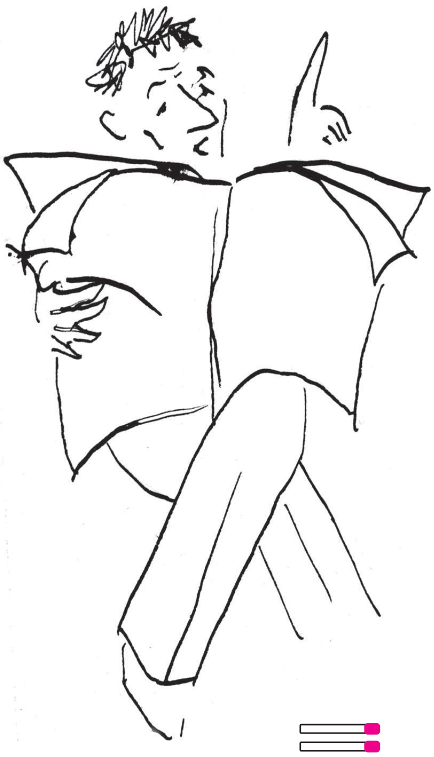
Gra o wielu obliczach

Tomasz IDZIASZEK[*]



– Nie mamy już w co grać! – powiedział Bartek, rzucając plecak w kąt przedpokoju.

– Słucham? – zapytał Tato, podnosząc głowę znad gazety.

– Marcin się wygadał i teraz wszyscy w klasie wiedzą, jak grać w kółko i krzyżyk i nie przegrać – kontynuował narzekanie Bartek.

– Ach, tak…

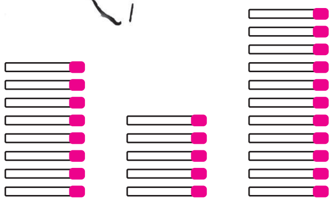
Od tygodnia gra w kółko i krzyżyk stanowiła główny punkt programu na przerwach w klasie Bartka. A dokładnie od czasu, gdy Bartek z kolegą wspólnymi siłami obmyślili, w jaki sposób, zaczynając rozgrywkę, zagwarantować sobie co najmniej remis. Najwyraźniej jego kolega zdradził, dotychczas pilnie strzeżoną, tajemnicę.

– Dlaczego więc nie zagracie w coś innego? – zapytał Tato. – Na przykład w warcaby lub szachy?

– Odpada! – odpowiedział Bartek. – Te gry są za długie na przerwę. A poza tym mają podstawowy feler: nie bardzo wiadomo, jak w nie grać, aby wygrać.

– Rozumiem zatem, że potrzebujesz prostej gry, dla której będziesz znał sposób na wygraną, ale twoi koledzy już niekoniecznie?

– Właśnie! – Bartek wyraźnie się ożywił. – Znasz taką, Tato?



Rys. 1. Przykładowa sytuacja w grze Nim.

– Chyba będę umiał Ci pomóc – powiedział tajemniczo Tato, złożył gazetę i sięgnął po pudełko zapałek, które leżało na kuchence. Zaciekawiony Bartek patrzył, jak Tato opróżnia na stół zawartość pudełka. Gdy usiadł naprzeciw niego, na stole leżały trzy stosy zapałek (rys. 1). Osiem, pięć i jedenaście zapałek, policzył szybko Bartek.

– Zasady są bardzo proste – zaczął objaśniać Tato. – Dwóch graczy wykonuje na przemian ruchy. Ruch polega na zabraniu z dowolnego stosu jednej lub większej liczby zapałek.

– A kiedy gra się kończy?

– Ten z graczy, który nie może wykonać ruchu, przegrywa. Czyli gdy na stole nie ma już zapałek. Spróbujemy? Możesz wykonać pierwszy ruch.

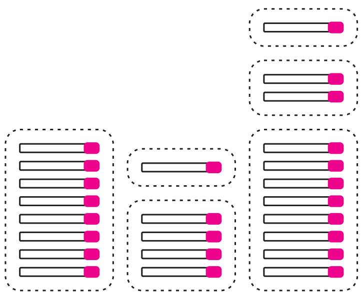
Bartek po chwili namysłu zabrał 3 zapałki z pierwszego stosu. Następnie Tato zabrał wszystkie zapałki z trzeciego stosu. Na stole zostały dwa stosy po 5 zapałek; ruch należał do Bartka.

– Czyżbym przegrał? – zaczął niepewnie chłopiec.

– Dlaczego tak sądzisz?

– Wydaje mi się, że cokolwiek zrobię, możesz to skontrować… Tak, teraz jestem tego pewien! Jeśli wykonam ruch na jednym ze stosów, będziesz mógł go powtórzyć na drugim.

– Masz całkowitą rację – uśmiechnął się Tato. – Każda sytuacja, w której na stole znajdują się dwa stosy o równej liczbie zapałek, jest przegrywająca dla gracza, który robi następny ruch. To znaczy, że jeśli przeciwnik nie popełni błędu, to gracz ten musi przegrać.



Rys. 2. Zauważmy, że operacja, którą Bartek wykonuje na stosach, to nic innego, jak zapis liczby zapałek na stosie w systemie binarnym. Na przykład 11 to w systemie binarnym 1011_2, gdyż

$$11 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

– Czy to znaczy, że od początku gry musiałem przegrać? – zapytał z wyrzutem Bartek.

– No cóż, tak jak w kółko i krzyżyk żaden z graczy nie może wygrać, jeśli przeciwnik gra bezbłędnie, tak samo w tej grze, w zależności od początkowego podziału zapałek, jeden z graczy, jeśli będzie grał bezbłędnie, na pewno wygra. Jednak tym razem to ty byłeś tym szczęśliwcem. Niestety, już w pierwszym ruchu popełniłeś błąd.

– Dlaczego?

– Już Ci tłumaczę. – Tato jeszcze raz ułożył na stole początkowe ustawienie zapałek. – Każda sytuacja na stole jest albo wygrywająca, albo przegrywająca dla gracza, który ma zamiar się ruszyć. Podam Ci teraz przepis, który pozwala

[*]Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

$$\begin{array}{r} 8 = 1000_2 \\ 5 = 101_2 \\ 11 = 1011_2 \\ \hline 110_2 = 6 \end{array}$$

Liczność stosów zapisujemy jeden pod drugim w systemie binarnym i dodajemy **bez** uwzględniania przeniesienia do następnej kolumny. Takie dodawanie oznaczać będziemy symbolem $\oplus$, a wynik nazywać *nim-sumą* liczb. Sytuacja jest wygrywająca wtedy i tylko wtedy, gdy nim-suma jest dodatnia. Tak jest na rysunku 1, gdyż $8 \oplus 5 \oplus 11 = 6$.

stwierdzić, z jaką sytuacją mamy do czynienia. Podziel każdy ze stosów na kupki, które zawierają 1, 2, 4 lub 8 zapałek, ale tak, żeby żadne dwie kupki, które powstały z tego samego stosu, nie zawierały takiej samej liczby zapałek.

Nie było to wcale proste zadanie, ale po chwili Bartek się z nim uporał (rys. 2).

– A teraz policz liczbę kupek, które zawierają po jednej zapałce, liczbę kupek, które zawierają po dwie zapałki itd., i powiedz, czy któraś z tych liczb jest nieparzysta.

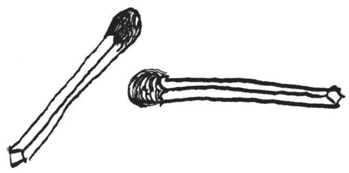
– Mamy tylko jedną kupkę z dwiema zapałkami i jedną kupkę z czterema, a 1 jest liczbą nieparzystą!

– Świetnie, w takim razie to oznacza, że ta sytuacja jest wygrywająca.

Bartek nie czuł się przekonany. Widząc zwątpienie w jego oczach, Tato rzekł:

– Spróbujemy to uzasadnić, a przy okazji pokażę Ci, w jaki sposób znajdować właściwe ruchy w sytuacji wygrywającej. Zwróć uwagę na to, że jeżeli sytuacja jest wygrywająca, to musi istnieć taki ruch, który prowadzi do sytuacji przegrywającej.

– To jasne! Jeżeli ja mam wygrać, to muszę wykonać ruch, po którym przeciwnik na pewno przegra.



– Właśnie – potwierdził Tato. – Natomiast wszystkie ruchy z sytuacji przegrywającej prowadzą do sytuacji wygrywających. Sytuacją przegrywającą jest także sytuacja, w której nie ma żadnych zapałek. Teraz wystarczy pokazać, że nasz przepis na sprawdzanie sytuacji zachowuje te trzy warunki.

– Najprostsze jest sprawdzenie sytuacji z zerową liczbą zapałek. Nie mamy żadnych stosów, więc wszystkie liczby kupek są parzyste. Zatem jest to sytuacja przegrywająca – zauważył Bartek.

– Otóż to! Weźmy teraz dowolną sytuację, o której podejrzewamy, że jest przegrywająca, czyli taką, w której wszystkie liczby kupek są parzyste. Jeśli teraz wykonamy ruch, usuwając kilka zapałek z pierwszego stosu, to czy kupki z tego stosu mogą pozostać takie same?

Stwierdzenie Bartka staje się jasne, jeśli zauważymy, że różne liczby mają różne zapisy w systemie binarnym.

– Oczywiście nie!

– Zatem po zabraniu zapałek będzie istniał taki rodzaj kupek, w którym albo przybędzie, albo ubędzie jedna kupka. Wobec tego kupek tego rodzaju będzie teraz nieparzyście wiele, czyli ruch prowadzi do sytuacji, którą zaliczymy do wygrywających – podsumował Tato. – Inaczej ma się sprawa, gdy jesteśmy właśnie w sytuacji wygrywającej. Teraz musimy pokazać ruch, który prowadzi do sytuacji przegrywającej. Załóżmy, że najliczniejsza nieparzysta grupa kupek zawiera po k zapałek. Zapałki należy zabrać z takiego stosu, który ma kupkę liczności k.

Uważny Czytelnik zauważy, że w dowodzie Taty brakuje uzasadnienia, dlaczego Bartek zawsze znajdzie wygrywający ruch. Załóżmy, że nim-suma wynosi s, czyli

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n = s,$$

i chcemy usunąć x zapałek ze stosu a_1. Powinniśmy osiągnąć sytuację, w której

$$(a_1 - x) \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n = 0.$$

Nim-suma tych dwóch równań (korzystamy z faktu, że $a \oplus a = 0$) to:

$$a_1 \oplus (a_1 - x) = s,$$

co po przekształceniach daje

$$x = a_1 - (a_1 \oplus s).$$

Zauważmy wreszcie, że ta wartość jest poprawna, o ile $a_1 > a_1 \oplus s$ (a to jest prawdą, jeżeli stos ma kupkę liczności k).

– Tutaj k jest równe 4, czyli zapałki należy zabrać z drugiego stosu.

– Racja! Spróbuj zabierać po jednej zapałce, aż doprowadzisz do sytuacji, w której wszystkie grupy kupek są parzyste – poradził Tato.

– Gdy zabiorę jedną zapałkę, nadal mamy jedną kupkę rozmiaru 4. Ale zabranie dwóch zapałek powoduje, że powstałe grupy kupek o licznościach 1, 2 i 8 są parzyste! – ucieszył się Bartek.

– To prawda, zatem aby wygrać, powinieneś był zacząć grę od zabrania dwóch zapałek z drugiego stosu.

* * *

Przez następne dwa tygodnie Bartek nie posiadał się z radości. Gra spodobała się jego kolegom, a on był w niej niekwestionowanym mistrzem. Co więcej, nawet Marcin nie znał jej sekretu. Do czasu gdy…

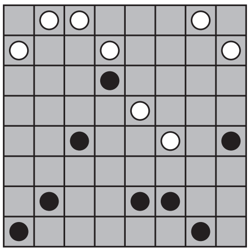
– Starszy brat Marcina, który studiuje matematykę, powiedział, że to znana gra, i objaśnił ją Marcinowi – dąsał się Bartek.

– Jeśli chcesz, mogę nauczyć Cię innej gry – zaproponował Tato.

– Żebym znowu musiał uczyć się nowej strategii? – Bartek nie chciał, by czas, który poświęcił na opanowanie sprawnego pamięciowego dzielenia stosów na kupki, poszedł na marne.

– Na to też możemy coś poradzić.

Tato wyjął planszę do warcabów i rozstawił na niej po osiem pionków, tak by w każdej kolumnie planszy znajdowało się dokładnie po jednym pionku każdego koloru (rys. 3).



Rys. 3. Przykładowa sytuacja w grze Northcotta. Jest to sytuacja wygrywająca, gdyż $5 \oplus 5 \oplus 3 \oplus 0 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 6 \oplus 2 = 4$.

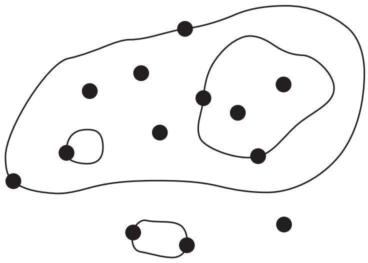
– Ty ruszasz się białymi, ja czarnymi. Można ruszyć się do przodu lub do tyłu o dowolną liczbę pól, ale nie można przeskoczyć pionka przeciwnika. Znów przegrywa ten, kto nie ma ruchu. Spróbuj znaleźć strategię!

Po rozegraniu kilku partii Bartek nieśmiało zaczął:

– Wydaje mi się, że wpadłem na pomysł. To, co jest ważne na planszy, to odległości między przeciwległymi pionkami. Jeśli wszystkie są równe zeru, to gracz, który wykonuje następny ruch, przegra. Każdy ruch do przodu zmniejsza jedną z tych odległości. Jeśli zatem potraktujemy każdą z odległości jak stos, to będziemy mieli naszą poprzednią grę! Nie bardzo jednak wiem, co zrobić z ruchami do tyłu.

– Nic, one w niczym nie zmieniają sytuacji. Zauważ, że jeśli jestem w sytuacji wygrywającej, to nie potrzebuję ich używać. Natomiast gdy w sytuacji przegrywającej cofnę się o kilka pól, to przeciwnik, wykonując ruch w przód o tyle samo pól, przywróci poprzednią sytuację. I, oczywiście, nie mogę cofać się tak w nieskończoność.

– Racja! – ucieszył się Bartek. – Zatem moja strategia będzie z powodzeniem działać i w tej grze. A znasz jeszcze inne takie gry, Tato? Na wypadek, gdyby bratu Marcina i tę grę udało się rozgryźć?



Rys. 4. Przykładowa sytuacja w grze Rims. Jest to sytuacja przegrywająca, gdyż $3 \oplus 2 \oplus 1 = 0$.

– Niech pomyślę – odparł Tato i wyjąwszy długopis i kartkę, narysował na niej kilka kropek i krzywych (rys. 4). – Teraz ruch polega na narysowaniu zamkniętej krzywej, która przechodzi przez co najmniej jeden punkt i nie przecina innych krzywych.

– To proste – zawołał Bartek. – Jeśli potraktujemy wszystkie punkty, które leżą w tej samej części kartki, jako stos, to wykonując ruch, zabieram ze stosu te punkty, przez które przechodzi krzywa.

– Prawie dobrze – pochwalił Tato. – Zauważ jednak, że zamykając krzywą, dzielisz tę część kartki na dwa kawałki i część kropek możesz zamknąć w krzywej, a część pozostawić na zewnątrz. Odpowiadałoby to zabraniu zapałek ze stosu i ewentualnemu podzieleniu go na dwa mniejsze stosy.

– Rzeczywiście – zamyślił się Bartek.

– Ale trop był dobry. Okazuje się, że tak jak w poprzedniej grze, te dodatkowe ruchy nie mają znaczenia.

Pokażemy, że dodatkowe ruchy w grze Rims nie pozwalają przejść z jednej sytuacji przegrywającej bezpośrednio do innej. Gdyby tak było, to moglibyśmy podzielić stos a_1 na dwa stosy x, y spełniające $x + y < a_1$ oraz

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n = 0,$$

$$x \oplus y \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n = 0.$$

Nim-sumując stronami, dostajemy

$$a_1 \oplus x \oplus y = 0,$$

czyli $a_1 = x \oplus y$. Korzystając z faktu, że $x \oplus y \leqslant x + y$ (bo ignorujemy przeniesienia), dochodzimy do sprzeczności:

$$a_1 = x \oplus y \leqslant x + y < a_1.$$

* * *

– Tato! Ten brat Marcina naprawdę zaczyna mnie denerwować. Znowu wpadł na strategię. Czy nie miałbyś czegoś naprawdę trudnego?

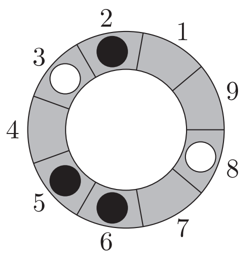
– Myślę, że miałbym. Ale to temat na osobną historię.

Opisana w artykule gra nosi nazwę Nim, a jej dwa warianty to gra Northcotta i Rims. Zachęcamy Czytelników do samodzielnego tworzenia nowych wariantów, natomiast zainteresowanych odpowiedzią Taty Bartka zapraszamy do lektury informatycznego kącika olimpijskiego.

Informatyczny kącik olimpijski (32): Gra w kółko

Tym razem w kąciku omówimy jedno z zadań z Potyczek Algorytmicznych 2009.

Plansza do gry „w kółko” składa się z pewnej liczby pól umieszczonych na okręgu. Na planszy rozmieszczone są białe i czarne pionki, na każdym polu co najwyżej jeden. Począwszy od grającego pionkami białymi, gracze na przemian wykonują ruchy na planszy. Ruch polega na przesunięciu wybranego pionka swojego koloru o dowolną liczbę niezajętych pól. Przykładowo, na zaprezentowanej na rysunku planszy grający białymi może wykonać ruch pionkiem z pola 3 na pole 4 lub pionkiem z pola 8 na jedno z pól 7, 9, 1.



Przykładowa sytuacja w grze w kółko.

Jeśli w swojej turze gracz nie może wykonać żadnego ruchu, przegrywa. Naszym zadaniem jest sprawdzić, przy założeniu, że gracze grają optymalnie, który z nich wygra. Może się zdarzyć i tak, że gra będzie toczyła się w nieskończoność – uznajemy wtedy, że nastąpił remis.