Rezonans parametryczny

Grzegorz DERFEL[*]

[*]Instytut Fizyki, Politechnika Łódzka

Kiedy, jako dziecku, pokazano mi, że bez niczyjej pomocy mogę rozhuśtać się na huśtawce, zmieniając jedynie rytmicznie pozycję ciała, byłem zachwycony tym tajemniczym zjawiskiem, dającym mi w cudowny sposób samowystarczalność podczas tej zabawy. Później, gdy już liznąwszy nieco fizyki, poznałem to zjawisko jako szczególny przypadek rezonansu parametrycznego, nie przestało wydawać mi się fascynujące. Rezonans parametryczny jest bowiem niezwykle interesującym przypadkiem drgań wymuszonych. Występuje w rozmaitych układach fizycznych i prowadzi do zaskakujących i złożonych zjawisk, z których wiele jest badanych współcześnie i ma znaczenie praktyczne. Huśtawka lub wahadło to najpopularniejsze przykłady układów, w których ten efekt można łatwo zaobserwować.

Rezonans parametryczny polega na wzbudzeniu niestabilności układu drgającego i wzroście amplitudy jego drgań w wyniku okresowej zmiany parametrów tego układu, a nie w wyniku działania zewnętrznej okresowej siły, jak to ma miejsce w przypadku zwykłego rezonansu.

Najprostszym rozważanym układem jest oscylator harmoniczny opisany ogólnym równaniem $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$, uwzględniającym zależność częstości własnej od czasu w sposób wyrażony wzorem $\omega^2(t) = \omega_0^2[1 + f(t)]$, gdzie $f(t)$ jest funkcją okresową o okresie $T_p = 2\pi/\omega_p$. Równanie w tej postaci znane jest jako równanie Hilla. Jeśli $f(t) = A\sin(\omega_p t + \phi)$, otrzymuje się równanie Mathieu

$$(*) \qquad \ddot{x} + \omega_0^2[1 + A\sin(\omega_p t + \phi)]x = 0.$$

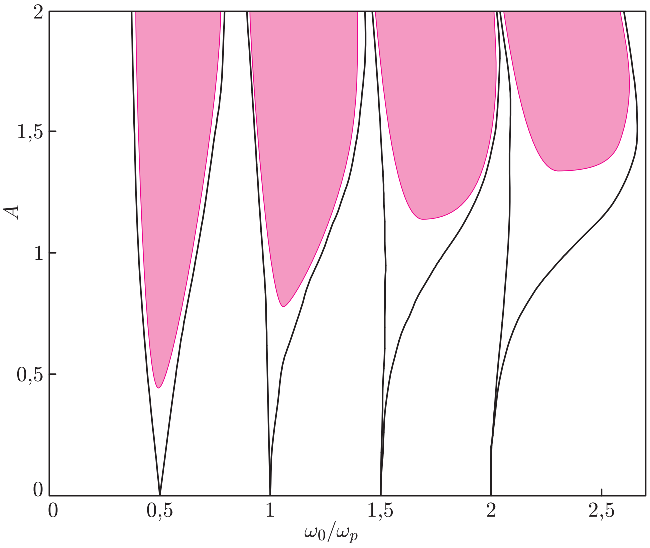
Mimo pozornej prostoty równania Hilla nie jest znane jego ogólne rozwiązanie. Rozwiązania równania Mathieu wyrażają się przez dość egzotyczne funkcje, zwane funkcjami Mathieu, a otrzymane wyniki przewidują nieograniczony wzrost amplitudy. Rozważa się także wersje obu równań uwzględniające siłę oporu proporcjonalną do prędkości:

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2[1 + f(t)]x = 0 \quad \text{oraz} \quad \ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2[1 + A\sin(\omega_p t + \phi)]x = 0.$$

Zaskakujące jest to, że rozwiązania otrzymane po uwzględnieniu siły oporu także przewidują nieograniczony wzrost amplitudy. Aby uzyskać opis realistycznego zachowania ze skończoną amplitudą, trzeba uwzględnić fakt, że rzeczywisty układ fizyczny przejawia właściwości nieliniowe.

Dla obu wymienionych równań istnieje trywialne rozwiązanie $x = 0$ oznaczające bezruch układu. Jednak okresowa zmiana parametrów o odpowiedniej częstości i wielkości powoduje, że stan ten jest niestabilny, tzn. jego małe zaburzenie zapoczątkowuje ruch drgający o narastającej amplitudzie.

Zmiana parametrów odbywa się dzięki pracy sił zewnętrznych. Praca ta zamienia się na energię drgań wzbudzonych w układzie. Ten przekaz energii jest analogiczny do wykonywania pracy nad układem przez zewnętrzną siłę wymuszającą drgania w przypadku zwykłego rezonansu.



Rezonans parametryczny rozumiany jako utrata stabilności przez nieruchomy układ, czyli wzbudzenie narastających drgań, jest najbardziej efektywny, gdy częstość zmian parametrów, ω_p, i częstość własna układu, ω_0, pozostają w relacji $\omega_p = 2\omega_0/k$, gdzie $k = 1, 2, 3, \ldots$ Oznacza to, że jeśli ta równość jest spełniona, to do wzbudzenia drgań układu wolnego od tarcia wystarczy dowolnie mała amplituda zmian parametru. W bardziej realistycznym przypadku układu doznającego oporów niezbędne jest przekroczenie krytycznej amplitudy zmian. Zmiany o minimalnej amplitudzie wystarczającej do wzbudzenia drgań mają wówczas częstość nieco wyższą od $2\omega_0/k$. Ze wzrostem tarcia rezonanse powstałe przy dużym k zanikają. Rysunek obok przedstawia te relacje dla oscylatora opisanego równaniem Mathieu, za pomocą wykresów na płaszczyźnie $(\omega_0/\omega_p, A)$. Widoczne są obszary zwane jęzorami niestabilności, wyznaczające wartości amplitudy i częstości zmian, przy których stan bezruchu traci stabilność. Cienkie krzywe startujące z punktów $(k/2, 0)$ dotyczą przypadku bez tarcia. Obszary zacieniowane odpowiadają układowi doznającemu oporów. Ze wzrostem amplitudy jęzory poszerzają się, co oznacza, że im większe są zmiany parametru, tym mniej ściśle musi być dopasowana ich częstość do częstości własnej układu. Przy małych amplitudach zmian parametru wzbudzone drgania mają częstość bliską częstości własnej układu.

Wahadło matematyczne lub fizyczne jest wygodnym obiektem, na przykładzie którego można zademonstrować różne sposoby wywoływania rezonansu parametrycznego.

Częstość własna wahadła matematycznego zależy od jego długości l i od przyspieszenia grawitacyjnego g. Możemy modulować okresowo oba te parametry.

Spektakularnym przykładem rezonansu parametrycznego wahadła o zmiennej długości, obowiązkowo wymienianym w publikacjach poświęconych temu zagadnieniu, jest ceremonia wprawiania w ruch wielkiej kadzielnicy w średniowiecznej katedrze w Santiago de Compostela w Hiszpanii. Kadzielnica ta, zwana „O Botafumeiro”, ma masę około 60 kg i zawieszona jest na linie przerzuconej przez blok umocowany pod sklepieniem katedry na wysokości około 20 m. Kilku mężczyzn pociąga za linę i popuszcza ją rytmicznie. Wahadło, jakim jest kadzielnica na linie, zostaje w ten sposób skracane o około 1,5 m, gdy mija położenie równowagi, a wydłużane na powrót, gdy osiąga maksymalne wychylenie. Po siedemnastu okresach (co zajmuje ok. 80 s) wahadło wychyla się o ponad 80°, a kadzielnica dotyka niemal sufitu. Sześćdziesięciokilogramowa masa pędząca z prędkością 50 km/h półtora metra nad podłogą kościoła robi wrażenie! Komputerowe eksperymenty z kadzielnicą można przeprowadzić, korzystając z symulacji zamieszczonej na stronie internetowej `http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/botafumeiro.html`.

Praca wykonana przy skracaniu liny podczas przelotu kadzielnicy przez punkt równowagi nad posadzką kościoła związana jest z przeciwdziałaniem jej ciężarowi i sile odśrodkowej. Zwiększa ona energię potencjalną układu. Gdy lina jest popuszczana, ludzie dzierżący linę wykonują pracę ujemną. Ma ona mniejszą wartość bezwzględną, gdyż przy małej prędkości i znacznym wychyleniu mniejsze są siła odśrodkowa i składowa siły ciężkości. Powstały w ten sposób ubytek energii wahadła jest więc mniejszy od poprzedniego zysku i w konsekwencji w ciągu każdej połówki okresu wahadło nabywa energię. Podobne operowanie liną, ale przesunięte w czasie o połowę okresu zmienności wywieranej siły, tłumi wychylenia i jest użyteczne przy hamowaniu ruchu kadzielnicy.

Drugi ze sposobów realizacji rezonansu parametrycznego wahadła to modulacja efektywnego przyspieszenia grawitacyjnego g_{ef}, wywołana przez okresową zmianę wysokości jego punktu zawieszenia. Na wahadło działa wtedy okresowa siła bezwładności skierowana pionowo w górę lub w dół, która dodaje się do siły ciężkości: $g_{\mathrm{ef}} = g + a\sin(\omega_p t + \phi)$, gdzie a jest amplitudą przyspieszenia punktu zawieszenia. Jeśli $a > g$, to efektywne przyspieszenie bywa zwrócone do góry. Wahadło tak pobudzane może wykonywać różne rodzaje ruchów – oprócz okresowych drgań także obroty w jednym kierunku, kombinacje obu ruchów oraz ruchy chaotyczne.

Gdy wahadło zmierza ku położeniu równowagi, punkt zawieszenia porusza się poniżej położenia środkowego. Jego przyspieszenie ma zwrot do góry, a więc na obciążnik wahadła działa siła bezwładności skierowana w dół. Jej składowa prostopadła do nici zwrócona jest ku położeniu równowagi, a więc rozpędza wahadło, dostarczając mu energii kinetycznej. W kolejnej ćwiartce okresu, gdy wahadło oddala się od położenia równowagi, przyspieszenie punktu zawieszenia ma zwrot w dół. Składowa prostopadła siły bezwładności zwrócona jest teraz od położenia równowagi, a więc także zwiększa energię wahadła, podnosząc je wyżej.

Warto tu wspomnieć o osobliwym zachowaniu sztywnego wahadła (którego masa skupiona jest na końcu pręta, a nie nici), które ma miejsce w wyniku oscylacji punktu zawieszenia o dostatecznie dużej częstości i amplitudzie. W tych warunkach górne położenie równowagi zyskuje stabilność. Wychylone z tego położenia wahadło wykonuje wokół niego stosunkowo powolne drgania na tle szybkich oscylacji punktu zawieszenia.

Przykładem dobrze opisywanym za pomocą wahadła fizycznego jest wspomniana na wstępie huśtawka. Aby ją silnie rozhuśtać, pochylamy się do przodu, gdy jest wychylona w przód, a odchylamy się do tyłu w jej tylnym skrajnym położeniu. W ten sposób zmieniamy parametry decydujące o częstości drgań własnych wahadła fizycznego, jakie tworzymy wraz z huśtawką: jego moment bezwładności i położenie jego środka ciężkości. Częstość tych zmian jest równa częstości wahnięć huśtawki: $\omega_p = \omega_0$, tj. $k = 2$. Ważna jest synchronizacja naszych ruchów z ruchem huśtawki.

Przy wychyleniu naszego ciała w przód lub w tył środek ciężkości wahadła przemieszcza się w taki sposób, że składowa siły ciężkości prostopadła do linii łączącej punkt zawieszenia ze środkiem ciężkości zwiększa się nieco w porównaniu z wartością, jaką by miała, gdybyśmy siedzieli nieruchomo. Ten przyrost siły wystarcza nie tylko do podtrzymania małych wahnięć, kompensując wpływ tarcia, ale także do wydatnego zwiększenia amplitudy.

Rezonans parametryczny wykryto w układach fizycznych o rozmaitej naturze. Można go zaobserwować np. w obwodach RLC, w plazmie poddanej działaniu zewnętrznych pól, w laserach i przy wzbudzaniu fal na powierzchni cieczy. Rozważa się go w kosmologicznych modelach opisujących kreację cząstek elementarnych oraz interpretując oscylacje neutrin. Zjawiska mechaniczne opisane tutaj (w których, zresztą, rezonans parametryczny został odkryty) mają tę zaletę, że można je łatwo odtworzyć w codziennych warunkach, do czego zachęcam.