Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2010

Zadania z fizyki nr 500, 501

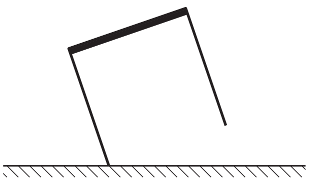
Redaguje Jerzy B. BROJAN

500. Naderer i Fedal grają w tenisa, a za ich plecami kibice mierzą odstępy czasu między uderzeniami, posługując się mikrofonami podłączonymi do zegarów elektronicznych. Po meczu trwa wymiana opinii:

– Muszę przyznać, że ten twój Fedal wali jak z armaty! Czas lotu piłki po jego uderzeniu jest o całe 20% krótszy od lotu po uderzeniu Naderera!

– Miło mi to słyszeć, ale chyba się pomyliłeś! To po uderzeniu Naderera czas lotu piłki jest o 15% krótszy!

Ile wynosi prędkość piłki po uderzeniu jednego i drugiego gracza?



501. Obrys taboretu jest sześcianem o boku 60 cm, blat jest cienkim jednorodnym kwadratem, nogi są cienkie i jednakowe, ich łączna masa jest równa masie blatu, a współczynnik tarcia o podłogę wynosi 0,4. Odchylono taboret na dwóch nogach od pionu prawie do punktu równowagi nietrwałej i puszczono, po czym opadł do normalnej pozycji. Reakcja podłogi wzdłuż osi pionowej jest niesprężysta. Czy po opadnięciu nastąpi oderwanie się od podłogi tych nóg, które dotychczas jej dotykały? O ile przesunął się taboret po opadnięciu? Wystarczy ocena przybliżona.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 488 ($WT = 1{,}00$) i 489 ($WT = 2{,}98$) z numeru 12/2009

Krzysztof Magiera	Łosiów	42,20
Michał Koźlik	Gliwice	32,92
Jerzy Witkowski	Radlin	24,98

Rozwiązania zadań z numeru 2/2010

Przypominamy treść zadań:

492. Pociąg o masie 500 ton został rozpędzony na drodze 300 m od spoczynku do prędkości 20 m/s przez lokomotywę, której moc była stała. Oblicz wartość tej mocy.

493. Siłomierz waży 1 N i daje dokładne wskazania, gdy jest w pozycji poziomej. Gdy zawieszono go za jeden koniec, wskazanie siłomierza było równe F_1, a gdy za drugi, wskazanie było równe F_2. Czy zawsze musi być spełnione równanie $F_1 + F_2 = 1$ N?

492. Z bilansu energii wynika równanie $Pt = \frac{1}{2}mv^2$, czyli

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}.$$

Całkując, wyznaczamy zależność drogi od czasu

$$s = \sqrt{\frac{2P}{m}}\frac{2}{3}t^{3/2}.$$

Po wyeliminowaniu z tych równań czasu t otrzymujemy wynik

$$P = \frac{mv^3}{3s} = 4{,}4 \text{ MW}.$$

493. Rozważmy typowy siłomierz, którego wskazanie pochodzi z wydłużenia sprężyny. Oczywiste jest, że podane równanie jest spełnione dla nieważkiej sprężyny (wtedy pozostałe elementy siłomierza można przedstawić jako dwa ciężarki dołączone do jej końców). Rozpatrzmy zatem najprostszy przypadek przeciwny, w którym sprężyna ma ciężar P skupiony w jej środku jako punkt materialny, natomiast pozostałe składniki ciężaru siłomierza pomińmy. Jeśli dla każdej z połówek podzielonej sprężyny zależność wydłużenia x od siły F jest opisana funkcją f (funkcję odwrotną oznaczymy jako g), to w przypadku zawieszenia siłomierza pionowo wydłużenie jednej ze sprężynek jest równe $f(P)$, a drugiej – równe zeru. Łączne wydłużenie $f(P)$ jest takie samo, jak dla poziomo ustawionego siłomierza, w którym wydłużenie każdej ze sprężynek jest równe $f(P)/2$, czyli wskazanie siłomierza wynosi $g(f(P)/2)$. Podane równanie sprowadza się więc do warunku

$$P = 2g(f(P)/2).$$

Jest on spełniony, gdy zależność siły od wydłużenia jest proporcjonalna (prawo Hooke'a), jednak w innych przypadkach – nie. Z praktycznego punktu widzenia nieliniowa skala siłomierza byłaby, co prawda, dziwna, ale wykluczyć jej nie można.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2010

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 587 ($WT = 2{,}67$) i 588 ($WT = 1{,}30$) z numeru 10/2009

Tomasz Tkocz	Rybnik	47,10
Tomasz Wietecha	Tarnów	41,46
Witold Bednarek	Łódź	40,89
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,58
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	37,27

Tomasz Tkocz drugi raz zalicza czterdzieści cztery punkty (jak widać, z niezłym naddatkiem).

Zadania z matematyki nr 603, 604

Redaguje Marcin E. KUCZMA

603. Na niektórych polach kwadratowej planszy o parzystych wymiarach $n \times n$ stoją pionki. Co sekundę jeden z pionków przechodzi na wolne pole sąsiednie (tj. mające wspólny bok z polem, na którym ten pionek stał). Po pewnym czasie wszystkie pionki znalazły się na swoich wyjściowych pozycjach. Okazało się ponadto, że każdy pionek wykonał n^2 ruchów i odwiedził wszystkie pola planszy. Dowieść, że był moment, w którym żaden pionek nie stał na swoim polu wyjściowym. Czy mogło się zdarzyć, że był dokładnie jeden taki moment?

604. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Znaleźć wszystkie układy liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$, spełniające układ równań

$$x_1 + \ldots + x_n = n, \qquad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = n^2$$

oraz nierówności $x_i \leqslant 2$ dla $i = 1, \ldots, n$.

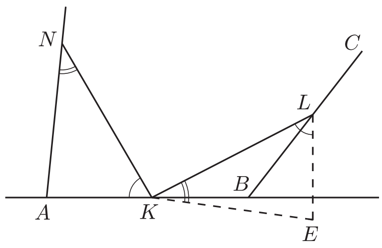
Zadanie 604 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2010

Przypominamy treść zadań:

595. Na bokach AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$ odłożono odcinki AK, BL, CM, DN jednakowej długości. Dowieść, że jeżeli czworokąt $KLMN$ jest kwadratem, to także czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

596. Dla każdej pary dodatnich liczb całkowitych m, n obliczyć największy wspólny dzielnik liczb $u = (n+1)^m - n$ oraz $v = (n+1)^{m+2} - n$.



595. Z punktu L prowadzimy półprostą, przecinającą prostą AB prostopadle, i odkładamy na niej odcinek LE długości $|LE| = |LB|$. Odległość punktu L od prostej AB nie przekracza $|LB|$, więc odcinek LE ma punkt wspólny z prostą AB, wobec czego

$$(1) \qquad |\sphericalangle LKE| \geqslant |\sphericalangle LKB|.$$

Równość zachodzi tylko wtedy, gdy $AB \perp BC$, czyli punkt E pokrywa się z B.

Skoro $KLMN$ jest kwadratem, mamy równości

$$|LK| = |KN| \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle ELK| = |\sphericalangle AKN|.$$

Łącząc je z równością $|LE| = |LB| = |KA|$ widzimy, że trójkąt ELK przystaje do AKN. Zatem $|\sphericalangle LKE| = |\sphericalangle KNA|$, skąd wobec (1) otrzymujemy nierówność $|\sphericalangle KNA| \geqslant |\sphericalangle LKB|$. Przesuwając cyklicznie oznaczenia wierzchołków czworokątów $ABCD$ i $KLMN$ dostajemy ciąg nierówności

$$|\sphericalangle KNA| \geqslant |\sphericalangle LKB| \geqslant |\sphericalangle MLC| \geqslant |\sphericalangle NMD| \geqslant |\sphericalangle KNA|.$$

Wszystkie one muszą być równościami.

Równość w (1) oznacza, że $AB \perp BC$ oraz $E = B$. Tak więc trójkąt BLK przystaje do AKN, zatem $|NA| = |KB|$. Przez cykliczną analogię wnosimy, że kolejne boki czworokąta $ABCD$ są prostopadłe, zaś odcinki NA, KB, LC, MD mają równe długości. To znaczy, że $ABCD$ jest kwadratem.

596. Przypuśćmy, że $\mathrm{NWD}(u,v) = d > 1$. Spełnione są kongruencje

$$(2) \qquad (n+1)^m \equiv n \quad \text{oraz} \quad (n+1)^{m+2} \equiv n \pmod{d}.$$

Wynika z nich, że liczba d nie ma wspólnego dzielnika pierwszego ani z liczbą $(n+1)^m$, ani z n. Odejmując związki (2) otrzymujemy zależność $(n+1)^{m+2} - (n+1)^m \equiv 0 \pmod{d}$, czyli

$$(n+1)^m\, n(n+2) \equiv 0 \pmod{d}.$$

Czynniki $(n+1)^m$ oraz n są względnie pierwsze z d, wobec czego $n+2 \equiv 0$, czyli $n \equiv -2 \pmod{d}$. Pierwsze równanie (2) mówi teraz, że $(-1)^m \equiv -2 \pmod{d}$. To zaś oznacza, że m jest liczbą parzystą i że $d = 3$; a ponadto $n \equiv -2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Wykazaliśmy więc, że jedynymi możliwymi wartościami $\mathrm{NWD}(u,v)$ są liczby 1 i 3; oraz, że jeśli nie są spełnione warunki

$$(3) \qquad m \equiv 0 \pmod{2}, \qquad n \equiv 1 \pmod{3},$$

to $\mathrm{NWD}(u,v) = 1$. Na odwrót, jeżeli warunki (3) są spełnione, to z określenia liczb u, v dostajemy $u \equiv 2^m - 1 \equiv 0 \equiv v \pmod{3}$, więc $\mathrm{NWD}(u,v) = 3$.

Rozwiązanie zadania F 765.
Przy zmianie objętości z V do $V/2$ para zwiększa ciśnienie, ale nie ulega kondensacji. Dalej następuje skraplanie, przy czym ciśnienie pary wodnej pozostaje stałe i równe $2p$. Zatem skropli się połowa pary wodnej w naczyniu, czyli $m = 0{,}5\mu\nu = 9$ g.