Każdy może włączyć się do działań prowadzonych przez Pracownię Komet i Meteorów. Wartościowe naukowo obserwacje wizualne nie wymagają żadnych nakładów finansowych, a jedynie poświęcenia kilku godzin i spędzenia ich pod rozgwieżdżonym niebem. Udział w projekcie PFN wymaga już pewnych nakładów, koniecznych do uruchomienia stanowiska obserwacyjnego umożliwiającego automatyczne zbieranie danych. Czeka też na chętnych wiele materiałów do przeanalizowania.

Dobrym punktem startu może być udział w Projekcie Perseidy 2010, organizowanym przez PKiM. Tegoroczne maksimum roju Perseidów wystąpi w okolicach sierpniowego nowiu Księżyca. Nasz satelita nie będzie więc przeszkadzał podczas obserwacji i na ciemnym niebie zobaczymy setki meteorów należących do tego roju.

Z tej okazji w Urzędowie w dniach 7–21 sierpnia zorganizowane zostanie dwutygodniowe spotkanie, którego celem będzie obserwacja tego największego wakacyjnego roju meteorów. Uczestnicy spotkania zapoznają się z metodami prowadzenia obserwacji oraz sposobem analizy zebranych wyników. Udział w spotkaniu jest bezpłatny. Dodatkową atrakcją spotkania będzie Ogólnopolski Zlot Miłośników Astronomii (OZMA), który w tym roku zawita do Urzędowa w dniach 12–15 sierpnia.

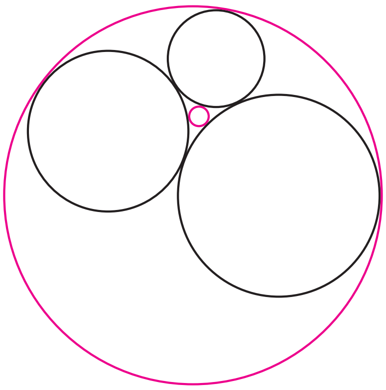
Więcej informacji o meteorach, działalności Pracowni Komet i Meteorów, oraz sposobach prowadzenia obserwacji i możliwościach współpracy można znaleźć na stronie `www.pkim.org`. Zachęcamy do kontaktu z Pracownią poprzez adres e-mail `pkim@pkim.org`.

Czwarty okrąg

Michał KIEZA

Załóżmy, że mamy dane trzy okręgi parami styczne oraz czwarty styczny do każdego z nich (istnieją dwa takie okręgi – jeden z nich jest zazwyczaj styczny wewnętrznie, a w szczególnym przypadku może okazać się prostą). Przez b_i dla $i = 1, 2, 3, 4$ oznaczmy kolejno ich krzywizny (krzywizna okręgu jest co do wartości bezwzględnej równa odwrotności promienia). W naszej sytuacji przyjmujemy, że krzywizny pierwszych trzech są dodatnie, a krzywizna czwartego okręgu jest dodatnia w przypadku, gdy jest on styczny zewnętrznie do pozostałych trzech, ujemna, jeśli jest styczny wewnętrznie, oraz równa 0, jeśli zdegeneruje się on do prostej. Wówczas zachodzi równość

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)^2.$$



Rys. 1

Zależność tę odkrył w 1643 roku Kartezjusz i opisał ją w liście do księżniczki Elżbiety Czeskiej, córki Elżbiety Stuart i Fryderyka V. Rozwiązując równanie kwadratowe, możemy stąd łatwo obliczyć krzywiznę czwartego okręgu, znając krzywizny pozostałych trzech – większy z dwóch pierwiastków odpowiada wewnętrznemu okręgowi, a mniejszy zewnętrznemu. Czytelnik Wnikliwy zapewne widzi również, że jeśli będziemy znali wzory opisujące krzywizny obu dorysowanych okręgów w zależności od krzywizn pozostałych trzech, to dowiedziemy prawdziwości formuły Kartezjusza.

Fragment wiersza Fredericka Soddy'ego *The Kiss Precise*:

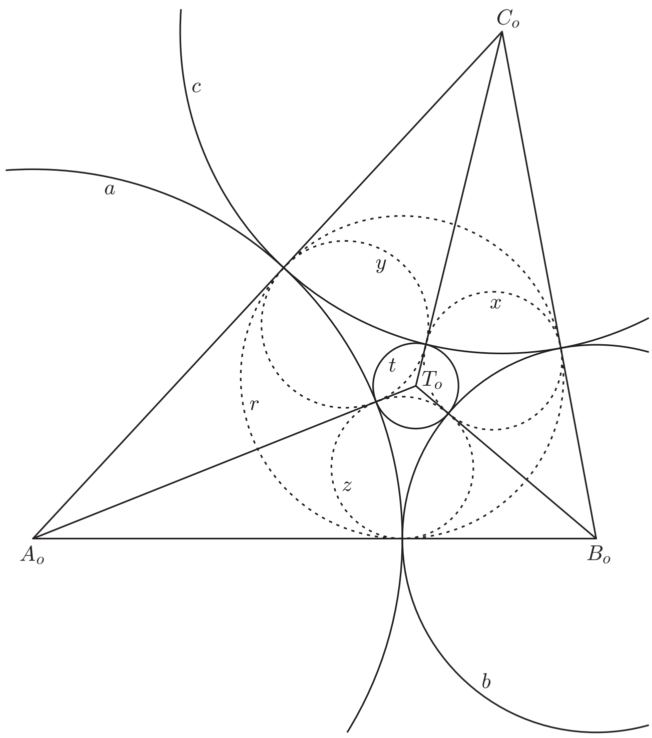
Four circles to the kissing come.
The smaller are the benter.
The bend is just the inverse of
The distance from the centre.
Though their intrigue left Euclid dumb
There's now no need for rule of thumb.
Since zero bend's a dead straight line
And concave bends have minus sign,
The sum of the squares of all four bends
Is half the square of their sum.

(*Nature* 137, 1021 (1936)).

Twierdzenie Kartezjusza odkrył na nowo w 1842 roku angielski matematyk Phillip Beecroft. Żeby było zabawniej, twierdzenie zostało jeszcze raz odkryte w 1936 roku przez Fredericka Soddy'ego (skądinąd laureata Nagrody Nobla w dziedzinie chemii za teorię rozpadu atomu i prace nad izotopami). Na jego cześć dwa okręgi styczne do danych trzech są nazywane okręgami Soddy'ego. Soddy był tak zafascynowany pięknem owej zależności, że ujął ją w swoim wierszu *The Kiss Precise*, a ponadto uogólnił ten wynik na przestrzeń. Rok później Thorold Gosset podał uogólnienie na dowolny wymiar – jeśli mamy w przestrzeni n-wymiarowej $n+2$ sfery $(n-1)$-wymiarowe, to zachodzi analogiczna zależność ze stałą $1/n$.

W literaturze istnieje kilka różnych dowodów formuły Kartezjusza albo, równoważnie, wzoru na krzywiznę czwartego okręgu, jednakże wszystkie wymagają mniej lub bardziej żmudnych rachunków. W tym miejscu chciałbym przedstawić rozumowanie, które właściwie bez żadnych rachunków pozwala wyznaczyć krzywiznę czwartego okręgu w zależności od krzywizn trzech pozostałych. Posłużymy się w tym celu inwersją. Krótko przypomnijmy zatem definicję i potrzebne własności.

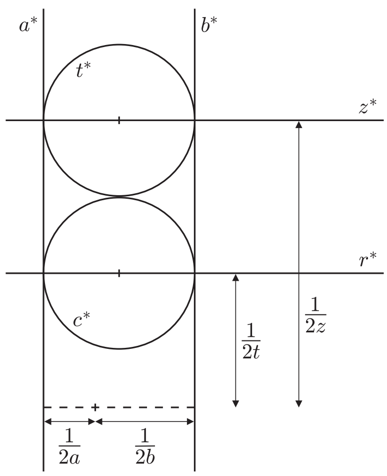
Inwersja względem okręgu o środku O i promieniu r to przekształcenie, które każdemu punktowi $P \neq O$ przyporządkowuje punkt P' leżący na półprostej OP i spełniający warunek $OP \cdot OP' = r^2$. Można próbować wyobrażać sobie inwersję jako próbę wykonania symetrii względem okręgu. Ponieważ całą nieskończoną część płaszczyzny na zewnątrz okręgu trzeba po przekształceniu zmieścić wewnątrz, więc obszary leżące daleko od zera przy inwersji są ściskane – im dalej, tym mocniej.



Rys. 2

Z definicji wynika natychmiast, że inwersja jest przekształceniem odwrotnym do siebie samej. Ponadto przekształca proste i okręgi na proste i okręgi, w szczególności okręgi przechodzące przez środek inwersji na proste (i odwrotnie). Można również udowodnić, że inwersja zachowuje kąty między krzywymi (zachęcam Czytelników do samodzielnego sprawdzenia tego faktu).

Przyjmijmy, że mamy dane trzy okręgi parami styczne zewnętrznie, o promieniach a, b, c i środkach odpowiednio A_o, B_o, C_o, oraz czwarty okrąg styczny do nich zewnętrznie, leżący w obszarze wyznaczonym przez punkty styczności pierwszych trzech, o promieniu t i środku T_o (rozważenie przypadku, w którym czwarty okrąg jest styczny wewnętrznie do pozostałych, pozostawiam Czytelnikowi). Przez o będziemy oznaczać okrąg o promieniu o, a jego krzywiznę będziemy oznaczać wielką literą O (co – mam nadzieję – nie doprowadzi do nieporozumień). Punkty styczności okręgów b, c, t leżą na bokach trójkąta $B_oC_oT_o$ i są punktami styczności okręgu o promieniu x, wpisanego w trójkąt $B_oC_oT_o$. To samo stwierdzamy dla okręgów o promieniach y, z, r wpisanych odpowiednio w trójkąty $A_oC_oT_o$, $A_oB_oT_o$, $A_oB_oC_o$ (rys. 2). Wszystkie rekwizyty już są przygotowane, czas rozpocząć przedstawienie.



Rys. 3

Rozważmy inwersję o środku w punkcie styczności okręgów a i b i promieniu 1 i popatrzmy na obrazy okręgów a, b, c, t, r, z w tym przekształceniu (przyjmijmy, że o^* jest obrazem okręgu o). Wówczas okręgi a i b przejdą na dwie proste równoległe a^* i b^*, odległe od środka inwersji odpowiednio o $\frac{1}{2a}$ i $\frac{1}{2b}$, gdyż w takich odległościach leżą obrazy końców średnic tych okręgów zawierających środek inwersji. Okręgi c i t przejdą na dwa okręgi styczne zewnętrznie do siebie i styczne do a^* i b^* (c^* będzie bliżej środka inwersji niż t^*), a więc ich obrazy będą miały równe promienie. Okrąg z musi przejść na prostą przechodzącą przez punkty styczności a^* i b^* z t^* oraz odległą od środka inwersji o $\frac{1}{2z}$. Podobnie okrąg r musi przejść na prostą przechodzącą przez punkty styczności a^* i b^* z c^* oraz odległą od środka inwersji o $\frac{1}{2r}$. Proste r^* i z^* są prostopadłe do prostych a^* i b^*. Skoro okręgi c^* i t^* mają równe promienie, to czworokąt wyznaczony przez proste a^*, b^*, r^*, z^* jest kwadratem. W takim razie

(1) $$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}=\frac{1}{2z}-\frac{1}{2r}, \quad \text{czyli w języku krzywizn} \quad A+B=Z+R.$$

Okrąg r jest styczny wewnętrznie do x, y, z, więc jego krzywizna jest ujemna.

Rozumując podobnie dla punktu styczności okręgów b i c, dostaniemy

(2) $$B+C=X+R,$$

a rozważając inwersję o środku w punkcie styczności b i t i przyglądając się obrazom okręgów b, t, a, c, x, z, otrzymamy

(3) $$X+Z=B+T.$$

Dodając (1), (2), (3) stronami, otrzymamy

(4) $$T=A+B+C-2R.$$

Pozostaje wyrazić R w zależności od A, B, C. Łącząc wzór Herona ze wzorem na pole w zależności od obwodu i promienia okręgu wpisanego (zob. *Delta* 4/2009, *Dziesięć wzorów na pole trójkąta*), dostaniemy

$$\sqrt{abc(a+b+c)}=(a+b+c)r,$$

skąd w języku krzywizn mamy

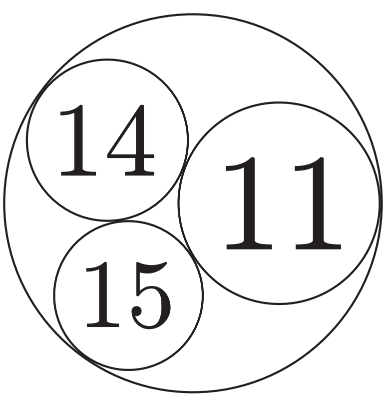
$$R^2=AB+BC+CA.$$

Uwzględniając, że $R<0$ i wstawiając do (4), dostaniemy

$$T=A+B+C+2\sqrt{AB+BC+CA}.$$

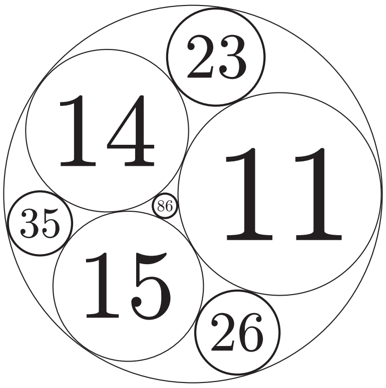
W drugim przypadku przed pierwiastkiem jest znak minus. Dowód jest więc zakończony.

Z twierdzeniem Kartezjusza i okręgami Soddy'ego wiąże się także inny problem – tzw. pakowanie Apoloniusza. Załóżmy, że mamy dany jeden duży okrąg oraz trzy okręgi parami styczne zewnętrznie oraz styczne wewnętrznie do pierwszego. Konstruujemy ciąg okręgów w następujący sposób: wybieramy dowolnie trzy okręgi i rysujemy czwarty styczny do każdego z nich (rys. 4–6, największy okrąg ma krzywiznę -6). Okazuje się, że jeśli pierwsze cztery okręgi miały krzywizny będące liczbami całkowitymi, to wszystkie skonstruowane okręgi też będą miały krzywizny całkowite.



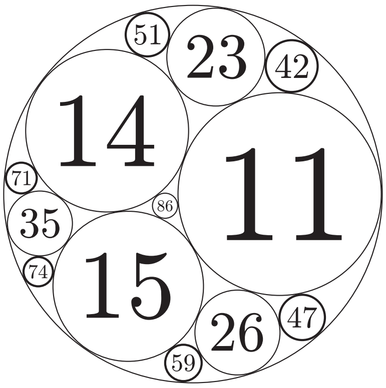
Rys. 4

Na wstępie zauważmy, że jeśli w początkowej sytuacji wytniemy z największego okręgu koła ograniczone przez pozostałe trzy okręgi, to otrzymamy w wyniku cztery obszary, każdy ograniczony przez trzy łuki. Kolejny okrąg rysujemy w jednym z tych obszarów – będzie styczny do jego brzegów, czyli do dokładnie trzech okręgów na rysunku. Analogicznie, w kolejnych krokach nie możemy dodać okręgu stycznego do więcej niż trzech narysowanych okręgów. Za każdym razem dorysowanie okręgu powoduje powstanie trzech nowych obszarów, w których możemy dodawać okręgi. Każdy obszar będzie ograniczony przez trzy łuki.



Rys. 5

Udowodnimy przez indukcję, że po każdym wykonanym kroku krzywizny wszystkich okręgów są całkowite oraz dla każdej trójki okręgów parami stycznych co najmniej jeden z okręgów Soddy'ego znajduje się już na rysunku. Bazę indukcyjną mamy za darmo. Załóżmy, że po pewnej liczbie kroków krzywizny wszystkich narysowanych okręgów są całkowite i dla każdej trójki okręgów parami stycznych istnieje co najmniej jeden z okręgów Soddy'ego. Chcemy dorysować okrąg s_1 styczny do trzech parami stycznych okręgów k_1, k_2, k_3, czyli jeden z okręgów Soddy'ego tej trójki. Z założenia indukcyjnego wynika, że s_2, drugi okrąg Soddy'ego tej trójki, został już narysowany. Z formuły Kartezjusza i wzorów Viète'a wynika, że suma krzywizn okręgów s_1 i s_2 jest równa podwojonej sumie krzywizn okręgów k_1, k_2, k_3. Ponieważ z założenia indukcyjnego krzywizny okręgów k_1, k_2, k_3 i s_2 są całkowite, więc krzywizna okręgu s_1 też jest całkowita. Aby dokończyć krok indukcyjny, wystarczy jeszcze zauważyć, że dla każdej trójki spośród czterech okręgów k_1, k_2, k_3, s_1 istnieje co najmniej jeden z okręgów Soddy'ego; dla pozostałych trójek okręgów parami stycznych gwarantuje nam to założenie indukcyjne. Dowód jest więc zakończony.



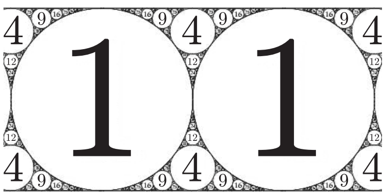
Rys. 6

Ronald Graham podał bardzo prosty algorytm generowania czwórek okręgów, od których można rozpocząć opisaną powyżej konstrukcję. Zacznijmy od analizy wyjściowej sytuacji: oznaczmy początkową czwórkę krzywizn przez (b_1, b_2, b_3, b_4) i przyjmijmy, że okrąg o krzywiźnie b_4 jest styczny wewnętrznie do okręgów o krzywiznach równych pozostałym trzem liczbom (czyli $b_4 < 0$, pozostałe dodatnie). Bez utraty ogólności możemy założyć, że $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3$. Dokonując zamiany zmiennych

$$b_1 = d_1 - b_4, \qquad b_2 = d_2 - b_4, \qquad b_3 = -2m + d_1 + d_2 - b_4$$

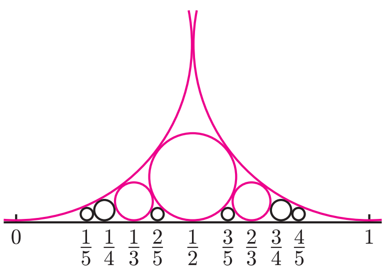
(wtedy $d_1 \leqslant d_2$), sprowadzamy formułę Kartezjusza do postaci

$$b_4^2 + m^2 = d_1 d_2 \quad \text{oraz} \quad b_4 < 0 \leqslant 2m \leqslant d_1 \leqslant d_2 \qquad (\text{bo } d_1 - 2m = b_3 - b_2 \geqslant 0).$$



Rys. 7

Stąd natychmiast wynika nierówność $m \leqslant |b_4|/\sqrt{3}$. Teraz możemy próbować znaleźć przykłady odpowiednich czwórek liczb całkowitych. Podstawiając za b_4 kolejne liczby całkowite ujemne, otrzymujemy dla każdej z nich skończenie wiele możliwych wartości m. Musimy jedynie sprawdzić, dla jakich par b_4 i m istnieje rozkład na czynniki d_1 i d_2, spełniający odpowiednie nierówności, co jest dobrym zadaniem dla komputera.



Rys. 8

Na internetowej stronie *Delty* można znaleźć przykłady różnych konfiguracji. Jedna z nich zwróci uwagę teorioliczbowców – są to bowiem okręgi Forda (a dokładniej, te styczne do prostej – rys. 7–8). Ich krzywizny są kwadratami kolejnych liczb naturalnych, a punkty styczności do prostej odpowiadają kolejnym wyrazom ciągu tzw. ułamków Fareya. Warto wspomnieć również, że Rademacher użył ich jako drogi całkowania w swoich pracach dotyczących funkcji partycji obliczających, na ile sposobów liczba n może być zapisana jako suma liczb całkowitych dodatnich nie większych niż n.