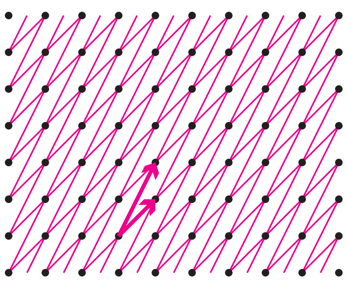
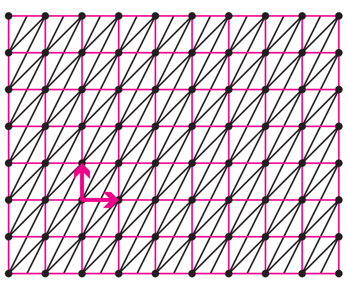
mała delta

Kratki



Rys. 1

Marcin się nudził – z nieznanych powodów sieć wysiadła i nie można było surfować po internecie. Nagle przypomniał sobie, że dziadek opowiadał mu, jak dawno, dawno temu, na zgromadzeniach zwanych nasiadówkami, można było zabijać marnowany czas, rysując coś na omawianych dokumentach. Żadnych dokumentów Marcin nie miał, ale przecież mógł sobie wyobrazić, że kartka czystego papieru to jest dokument. Wziął więc do ręki ołówek i narysował dwie strzałki wychodzące z tego samego punktu. Gdy przyjrzał się rysunkowi, przyszło mu do głowy, że jeśli do końców narysowanych strzałek będzie przyczepiał strzałki takie, jak narysowane, to powstanie równiutka kratka. I w początkach/końcach strzałek – dla piękna rysunku – postawił kropki (rys. 1).

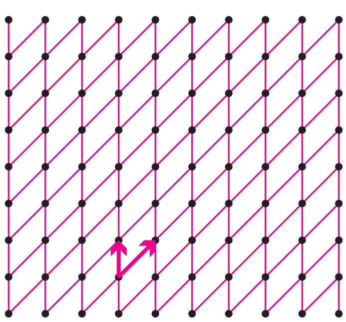


Rys. 2

Gdy podziwiał swoje dzieło, do pokoju wpadli koledzy.

– O, jaka krzywa kratka! – zawołała Ania. – Przecież te same punkty mogłeś dostać, rysując kratkę inaczej! – i narysowała na jego rysunku bardzo porządną, kwadratową kratkę (rys. 2).

– A ja uważam, że kwadratowa kratka jest nudna – wtrąciła się Agnieszka. – Kratka powinna być trochę krzywa, ale, oczywiście, nie aż tak krzywa, jak ta Marcina. – i wzięła się do rysowania.

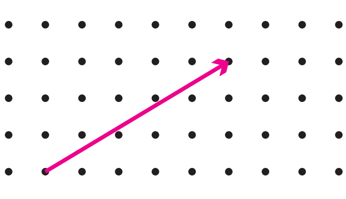


Rys. 3

– Proponuję, abyś jednak zaczekała, bo jak narysujesz trzecią kratkę na tym samym rysunku, to nic nie będzie widać – zauważył Witek. – O, tutaj narysowałem ci takie same kropki jak na rysunku Marcina.

– Dziękuję – powiedziała Agnieszka i wyrysowała na kartce Witka swoją kratkę (rys. 3).

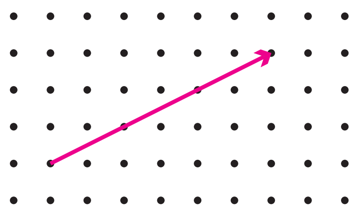
– Bo kratek może być dowolnie wiele – pospieszył z wyjaśnieniem Krzysiek. – Pierwszą strzałkę mogę poprowadzić między dowolnymi dwoma punktami, a drugą będzie można dobrać tak, aby żaden z punktów nie został pominięty. – I narysował strzałkę (rys. 4) znacznie dłuższą od tych, które rysowali jego poprzednicy.



Rys. 4

Z początku wyglądało na to, że przesadził z optymizmem, ale po chwili okazało się, że faktycznie istnieje druga strzałka, która wraz ze strzałką Krzyśka będzie produkowała kratkę dającą te same punkty. Kratka wyszła dość obrzydliwa, ale rzeczywiście istniała (a czy Ty, Czytelniku, umiesz znaleźć odpowiednią drugą strzałkę i uzupełnić rysunek Krzyśka?).

– Tylko że to, co mówi Krzysiek, to, oczywiście, nieprawda – odezwał się Piotr. – Dorysujcie drugą strzałkę do takiej. I na nowej kartce papieru narysował strzałkę niewiele różniącą się (rys. 5), przynajmniej na oko, od strzałki Krzyśka.



Rys. 5

Wszyscy wzięli się do rysowania, ale faktycznie jakoś nikomu nie udawało się znaleźć odpowiedniej drugiej strzałki.

– A to ciekawe – zainteresował się Kuba. – Muszę to jakoś wrzucić do komputera.

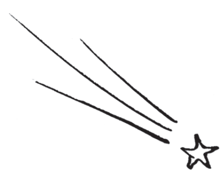
– Wydaje mi się, że to jednak powinno być bardzo proste – stwierdziła Marysia. – W końcu te kropki to zaledwie $\mathbb{Z}^2$.

– Tylko spokojnie – odezwał się, milczący jak zawsze, drugi Krzysztof.

No właśnie, powstały dwa pytania:

- Czy każdą strzałkę, łączącą na płaszczyźnie dwa punkty o obu współrzędnych całkowitych, da się uzupełnić drugą taką strzałką, by wielokrotnie dodając bądź odejmując takie wektory, można było dotrzeć do każdego punktu o obu współrzędnych całkowitych?
- I jak tę drugą strzałkę (tam, gdzie to jest możliwe) znaleźć?

Wykonanie kilku eksperymentów prowadzi do przypuszczenia, że dobra strzałka nie powinna przechodzić przez żadną kropkę – ma mieć kropkę na początku i na końcu, ale żadnej więcej. Istotnie, taka kropka gdzieś wewnątrz strzałki nie będzie punktem kratowym w wyznaczonej przez tę strzałkę kracie niezależnie do tego, jak będzie wyglądała druga strzałka. Gdy posłużymy się współrzędnymi, spostrzeżenie to będzie oznaczało, że współrzędne strzałki/wektora będą względnie pierwsze (czyli ich największy wspólny dzielnik będzie równy 1). W przeciwnym razie nasza strzałka dawałaby podzielić się na kilka jednakowych, krótszych strzałek też mających początki/końce w punktach kratowych (zapewne ma tu coś do rzeczy twierdzenie Talesa), a więc miałaby punkty kratowe nie tylko na początku i końcu. Tak właśnie było w przykładzie Piotra.



Dobór drugiej strzałki sprawdza się w eksperymentach, gdy w równoległoboku rozpiętym na obu obranych strzałkach nie ma żadnej kropki – przecież do takiej wewnątrz nie będzie prowadziła żadna linia. Proponuję Czytelnikowi sprawdzenie, iż oznacza to, że pola wszystkich takich równoległoboków są równe 1. W braku lepszego pomysłu można posłużyć się wzorem Picka (czyt. pika) na pole (dowolnego) wielokąta o wierzchołkach w punktach kratowych

$$\frac{1}{2}b + w - 1,$$

gdzie b to liczba tych punktów na brzegu wielokąta, a w – wewnątrz.

Czy jednak zawsze do strzałki mającej współrzędne względnie pierwsze można dobrać drugą strzałkę tak, by rozpięty na nich równoległobok miał pole 1? Pomocny jest tu kolejny wzór: pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $[a, b]$ i $[c, d]$ jest równe

$$|ad - bc|.$$

Czy zatem mając liczby całkowite i względnie pierwsze a i b, można znaleźć takie liczby całkowite c i d, aby było $|ad - bc| = 1$?

Okazuje się, że i na to matematycy znaleźli sposób (i to 2400 lat temu). Prawdziwe jest bowiem twierdzenie, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n istnieją takie liczby całkowite p i q, że

$$pm + qn = \mathrm{NWD}(m, n).$$

Na przykład dla 5 i 3 takimi liczbami są -1 i 2. Sądzę, że każdy potrafi z tego odczytać, jaka strzałka będzie dobrą parą w przykładzie Krzyśka.

I kto by to pomyślał, że w rysowaniu kratek może być tyle matematyki!

No i warto zajrzeć do artykułu otwierającego ten numer.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS