Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2010

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 486 ($WT = 1{,}98$) i 487 ($WT = 2{,}73$) z numeru 11/2009

Krzysztof Magiera	Łosiów	39,41
Michał Koźlik	Gliwice	31,92
Jerzy Witkowski	Radlin	22,49

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

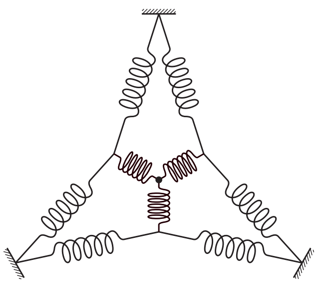
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z fizyki nr 498, 499

Redaguje Jerzy B. BROJAN

498. Trzy cienkie, początkowo nienaładowane, przewodzące sfery o promieniach r_1, r_2 i r_3 ($r_1 < r_2 < r_3$) są współśrodkowe, przy czym wewnętrzna i zewnętrzna są połączone przewodem przechodzącym przez otworek w środkowej sferze. Jakie ładunki wystąpią na tych dwóch sferach, jeśli na środkową wprowadzimy ładunek Q?

499. Zestaw 9 nieważkich sprężynek o stałej sprężystości k i długości swobodnej zero (tzn. przyjmujących długość l pod wpływem siły $F = kl$) jest rozpięty na trzech punktach leżących na tej samej wysokości i tworzących trójkąt równoboczny o boku a (rys. 1). O ile obniży się środkowy punkt zestawu po jego obciążeniu ciężarem P?



Rys. 1

Rozwiązania zadań z numeru 1/2010

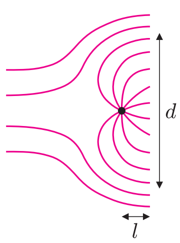
Przypominamy treść zadań:

490. Fusy herbaciane są nieco cięższe od herbaty i opadają na dno. Gdy zamieszamy herbatę, powstaje siła odśrodkowa, która powoduje podwyższenie poziomu herbaty przy brzegu naczynia, tak jakby siła ciężkości była odchylona od pionu na zewnątrz (mówimy o „pozornej sile ciężkości”, będącej sumą siły ciężkości i siły odśrodkowej). Zatem rolę dna powinien pełnić raczej zewnętrzny brzeg denka szklanki, a nie jego środek. Dlaczego więc fusy zbierają się na środku denka?

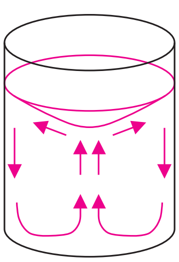
491. Do strumienia czystej wody płynącej z prędkością $v_0 = 10$ cm/s wprowadzono końcówkę rurki, przez którą wypływa zabarwiona woda w tempie $A = 1000\ \mathrm{cm^3/s}$. Obliczyć średnicę d strumienia wody zabarwionej w odległości $l = 5$ cm za końcówką rurki (rys. 2), przy następujących założeniach:

1) woda wypływa z rurki izotropowo (jednakowo we wszystkich kierunkach),
2) przepływ jest stacjonarny (stały w czasie) i laminarny, tzn. nie występuje mieszanie.

Wskazówka. Dla pola przepływu cieczy obowiązuje zasada superpozycji (podobnie jak np. dla pola elektrycznego), zgodnie z którą w każdym punkcie wektor prędkości cieczy jest sumą stałego wektora $\vec{v}_0$ i radialnie skierowanego wektora o wartości zależnej od A i od odległości od rurki.



Rys. 2



Rys. 3

490. Wirowy ruch herbaty jest stopniowo hamowany przez tarcie o ścianki i dno (lepkość). Wolniejszy obrót cieczy przy dnie oznacza, że siła odśrodkowa działa tam na nią słabiej, stąd ciśnienie przy brzegu dna jest mniejsze, niż byłoby w przypadku braku lepkości. Nie jest więc w stanie zrównoważyć ciśnienia słupa cieczy (które przy brzegu jest podwyższone, bo wyższa jest wysokość słupa). Dlatego herbata opada przy brzegu, a wznosi się wzdłuż osi szklanki (rys. 3), pociągając fusy do środka.

491. Zgodnie ze wskazówką, w punkcie odległym od rurki o l wzdłuż osi poziomej i o y wzdłuż osi pionowej (osie wg rysunku) pozioma składowa prędkości cieczy jest równa

$$v_x(y) = v_0 + \frac{A}{4\pi}\frac{l}{(l^2+y^2)^{3/2}}.$$

Wartość y odpowiadającą granicy strumienia zabarwionego (tzn. równą połowie szukanej średnicy d) znajdziemy z warunku zgodności przepływu

$$\int_0^{d/2} v_x(y)\cdot 2\pi y \mathrm{d}y = A.$$

Całka wynosi

$$\frac{\pi v_0 d^2}{4} + \frac{A}{2}\left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2+(d/2)^2}}\right).$$

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe – zmienną $s = (d/2l)^2$ i stałą $\alpha = A/2\pi v_0 l^2$ – dochodzimy do równania

$$s = \alpha\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+s}}\right).$$

Po usunięciu pierwiastka okazuje się ono równaniem kwadratowym zmiennej s. Jedynym rozwiązaniem spełniającym warunek $s > \alpha$ jest

$$s = \frac{1}{2}(2\alpha - 1 + \sqrt{4\alpha+1}).$$

Dla naszych danych mamy $\alpha = 0{,}637$, $s = 1{,}078$ i $d = 2l\sqrt{s} = 10{,}4$ cm.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2010

Zadania z matematyki nr 601, 602

Redaguje Marcin E. KUCZMA

601. Znaleźć wszystkie pary (n, p) dodatnich liczb całkowitych, w których p jest liczbą pierwszą, spełniające równanie $n^8 = p^5 + p^2 + n^2$.

602. Liczby dodatnie a, b, c są związane zależnością $bc + ca + ab = 1$. Dowieść, że

$$\frac{a\sqrt{bc}}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{bc}} + \frac{b\sqrt{ca}}{\sqrt{1+b^2}+\sqrt{ca}} + \frac{c\sqrt{ab}}{\sqrt{1+c^2}+\sqrt{ab}} \leqslant \frac{1}{a+b+c}.$$

Zadanie 602 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2010

Przypominamy treść zadań:

593. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie:

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_3 = 2, \qquad a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2}+5}{a_n}.$$

Dowieść, że wszystkie jego wyrazy są liczbami całkowitymi.

594. Rozważamy funkcję

$$f(x) = \frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}.$$

Niech a będzie ustaloną liczbą rzeczywistą, różną od 0 i 1. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste x, spełniające równanie $f(x) = f(a)$.

593. Jest jasne, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami dodatnimi. W zadanym wzorze rekurencyjnym $a_n a_{n+3} = a_{n+1}a_{n+2} + 5$ zastępujemy n przez $n-1$ (co wolno zrobić dla $n > 1$) i odejmujemy stronami otrzymane równości:

$$a_n a_{n+3} - a_{n-1}a_{n+2} = a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+1}.$$

Przekształcamy tę równość do postaci

$$\frac{a_{n+1}+a_{n+3}}{a_{n+2}} = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n}.$$

Przyjmując dla $n > 1$ oznaczenie $c_n = (a_{n-1}+a_{n+1})/a_n$, widzimy, że $c_{n+2} = c_n$ dla $n > 1$. Skoro zaś $c_2 = (a_1+a_3)/a_2 = 3$, $c_3 = (a_2+a_4)/a_3 = 4$, ciąg (c_n) jest ciągiem naprzemiennym $(3, 4, 3, 4, 3, 4, \ldots)$. Pozostaje zauważyć, że

$$a_{n+1} = c_n a_n - a_{n-1} \quad \text{dla } n > 1.$$

Z tego wzoru jasno wynika, że wszystkie liczby a_n są całkowite.

594. Równanie $f(x) = f(a)$ jest dla $a, x \notin \{0, 1\}$ równoważne równaniu $F(a, x) = 0$, gdzie

$$(1) \qquad F(a,x) = a^2(a-1)^2(x^2-x+1)^3 - (a^2-a+1)^3x^2(x-1)^2.$$

Przy ustalonej wartości a jest to wielomian zmiennej x, szóstego stopnia. Ma zatem nie więcej niż 6 pierwiastków. Jednym z nich jest oczywiście $x = a$.

Nietrudno zauważyć, że $f(1/x) = f(x)$ oraz $f(1-x) = f(x)$. Pierwiastkami wielomianu $x \mapsto F(a,x)$ są więc także liczby uzyskane z liczby a przez branie odwrotności oraz dopełnień do jedynki:

$$(2) \qquad a, \quad \frac{1}{a}, \quad 1-a, \quad \frac{1}{1-a}, \quad 1-\frac{1}{a}\ \left(=\frac{a-1}{a}\right), \quad \frac{a}{a-1}.$$

Gdy te liczby są parami różne, wielomian $x \mapsto F(a,x)$ ma rozkład na czynniki

$$F(a,x) = A(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1+a)\left(x-\frac{1}{1-a}\right)\left(x-\frac{a-1}{a}\right)\left(x-\frac{a}{a-1}\right),$$

gdzie $A = a^2(a-1)^2$ jest współczynnikiem wiodącym. Włączamy jego czynniki do odpowiednich czynników rozkładu i przepisujemy ów rozkład jako

$$(3) \qquad F(a,x) = (x-a)(ax-1)(x-1+a)((a-1)x+1)(ax-a+1)((a-1)x-a).$$

Należałoby przebadać, czy faktycznie ciąg (2) zawiera sześć różnych liczb. Zamiast tego prościej jest potraktować całe rozumowanie poprzedzające wzór (3) jako nieformalne jego przygotowanie – i po prostu sprawdzić, wymnażając nawiasy, że prawe strony wzorów (1) i (3) są równe dla każdej pary liczb rzeczywistych a, x.

Z równości (3) wynika wprost, że (dla ustalonego $a \notin \{0, 1\}$) pierwiastkami równania $f(x) = f(a)$ (z niewiadomą x) są liczby wymienione w (2) i tylko one. (Dla pewnych wartości a występują w ciągu (2) powtórzenia, co oznacza, że niektóre z tych liczb są wówczas pierwiastkami podwójnymi).

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 585 ($WT = 1{,}90$) i 586 ($WT = 2{,}76$) z numeru 9/2009

Zbigniew Galias	Kraków	44,53
Tomasz Tkocz	Rybnik	43,13
Marek Prauza	Poraj	42,39
Tomasz Wietecha	Tarnów	37,49
Witold Bednarek	Łódź	36,92

Pan Zbigniew Galias: to już drugie okrążenie.