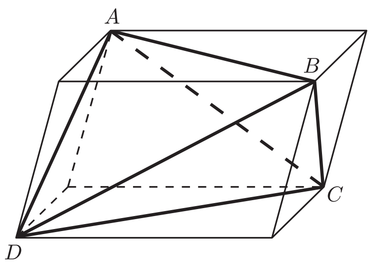
Wpisywanie czworościanu w równoległościan

Przez każdą krawędź czworościanu $ABCD$ poprowadźmy płaszczyznę równoległą do przeciwległej krawędzi czworościanu. Płaszczyzny te wyznaczają równoległościan. W każdej z jego ścian jedna przekątna jest krawędzią czworościanu $ABCD$, a druga przekątna jest równa i równoległa do przeciwległej krawędzi tego czworościanu. Równoległościan ten nazywamy *równoległościanem opisanym* na czworościanie $ABCD$ (czasem mówi się też *równoległościan dopisany*), a czworościan $ABCD$ *czworościanem wpisanym* w ten równoległościan (rys. 1). Okazuje się, że ta konstrukcja jest w wielu sytuacjach bardzo użyteczna.



Rys. 1

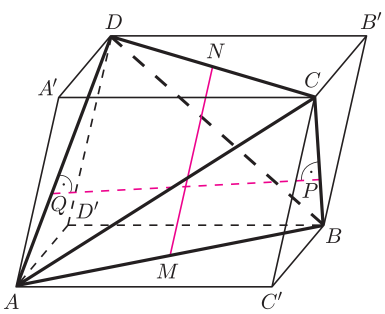
Biśrodkowa – odcinek łączący środki przeciwległych krawędzi w czworościanie (odcinek MN na rysunku 2).

Biwysokość – odcinek prostopadły do dwóch przeciwległych krawędzi czworościanu, którego końce należą do prostych zawierających te krawędzie (odcinek PQ na rysunku 2).

Zauważmy w szczególności, że

- biśrodkowe czworościanu są równoległe do odpowiednich krawędzi równoległościanu, a ich długości są równe długościom tych krawędzi,
- biwysokości są prostopadłe do przeciwległych płaszczyzn równoległościanu,
- środek ciężkości czworościanu pokrywa się ze środkiem ciężkości równoległościanu, a środkowe czworościanu są przekątnymi tego równoległościanu,
- objętość czworościanu jest 3 razy mniejsza od objętości równoległościanu.

Zachęcamy Czytelników do samodzielnego sprawdzenia tych prostych faktów. Wykorzystamy tę wiedzę w poniższych przykładach.



Rys. 2

1. *Długości biśrodkowych pewnego czworościanu są równe a, b, c. Dowieść, że objętość tego czworościanu nie przekracza $\frac{1}{3}abc$.*

Rozwiązanie. Równoległościan opisany na tym czworościanie ma krawędzie długości a, b, c, skąd wniosek, że jego objętość nie przekracza abc. To zaś oznacza, że objętość danego czworościanu nie przekracza $\frac{1}{3}abc$.

2. *Udowodnić, że biśrodkowa jest prostopadła do każdej z dwóch biwysokości łączących pary pozostałych przeciwległych krawędzi czworościanu.*

Rozwiązanie. Niech $ABCD$ będzie czworościanem wpisanym w równoległościan $AC'BD'A'CB'D$, M i N – środkami krawędzi AB i CD, a PQ – odcinkiem biwysokości łączącej BC i AD (rys. 2). Odcinek PQ jest prostopadły do płaszczyzny $BB'CC'$, jest więc też prostopadły do krawędzi CC'. Jednakże $MN \parallel CC'$, więc $PQ \perp MN$.

Czworościan, w którym przeciwległe krawędzie są równe, nazywamy *równościennym.*

Czworościan, który ma dwie pary przeciwległych krawędzi równych, nazywamy *półrównościennym.*

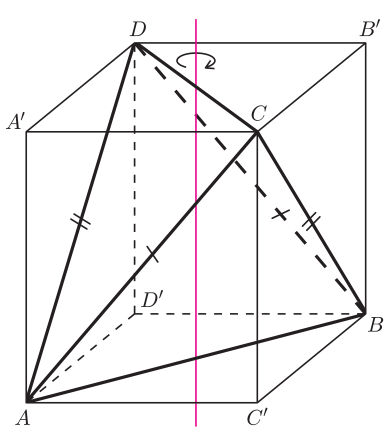
Rombościan to równoległościan, którego wszystkie ściany są rombami.

Jak widać, z pozoru niebanalne zadania przy użyciu tej techniki stały się niemal oczywiste. Wpisywanie w równoległościan przynosi wiele korzyści również w przypadku, gdy ten okaże się jakiś szczególny. Odnotujmy więc, że równoległościan opisany na czworościanie

- jest sześcianem $\Leftrightarrow$ czworościan jest foremny,
- jest prostopadłościanem $\Leftrightarrow$ przeciwległe krawędzie czworościanu są równe,
- jest graniastosłupem prostym o podstawie równoległoboku $\Leftrightarrow$ w czworościanie są dwie pary przeciwległych krawędzi równych,
- jest rombościanem $\Leftrightarrow$ przeciwległe krawędzie są prostopadłe.

Nietrudne sprawdzenie powyższych równoważności pozostawiamy Czytelnikowi. Prostopadłościany i sześciany są szczególnie przydatne, gdy chcemy obliczyć jakąś wielkość dla odpowiednich czworościanów. Ale nie tylko wtedy – dowolny graniastosłup prosty o podstawie równoległoboku ma pewną zaletę, o której sile przekonamy się na poniższym przykładzie.

3. *W czworościanie $ABCD$ zachodzą równości $AC = BD$ oraz $AD = BC$. Udowodnić, że środek sfery wpisanej i środek sfery opisanej na tym czworościanie leżą na prostej łączącej środki AB i CD.*



Rys. 3

Rozwiązanie. Wpiszmy czworościan $ABCD$ w równoległościan $AC'BD'A'CB'D$. Z równości $AC = BD = A'C'$ oraz $AD = BC = A'D'$ wynika, że ściany boczne tego równoległościanu są prostokątami, zatem równoległościan ten jest graniastosłupem prostym o podstawie równoległoboku (rys. 3). W takim razie prosta łącząca środki odcinków AB i CD jest prostopadła do jego podstaw. Zatem obrót wokół niej o $180°$ zachowuje zarówno dany równoległościan, jak i czworościan $ABCD$. W takim razie środki sfery wpisanej i opisanej muszą leżeć na tej prostej.

Oczywiście w wielu przypadkach można przeprowadzić podobne rozumowanie, nie rozpatrując równoległościanu opisanego, jednakże operowanie nim pozwala lepiej uporządkować dane i wielokrotnie skraca czas myślenia nad zadaniem.

Zadania

4. (ZWARDOŃ 2001) *Dany jest czworościan foremny $ABCD$ o krawędzi długości* 1. *Punkty P i Q są środkami odpowiednio krawędzi AB i CD. Obliczyć odległość między prostymi AQ i CP.*

Wskazówka do 4. Odległość między prostymi jest równa odległości między dwiema płaszczyznami, z których każda zawiera jedną z tych prostych i jest równoległa do drugiej.

5. (OM 32-III-6) *W czworościanie o objętości V suma kwadratów długości krawędzi wynosi S. Wykazać, że*

$$V \leqslant \frac{S\sqrt{S}}{72\sqrt{3}}.$$

Wskazówka do 5. W dowolnym równoległoboku suma kwadratów wszystkich jego boków jest równa sumie kwadratów przekątnych.

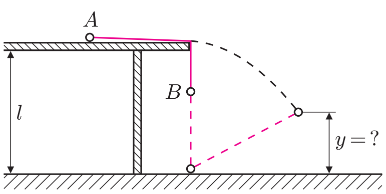
Więcej zadań na internetowej stronie *Delty*.

Michał KIEZA

Zadania

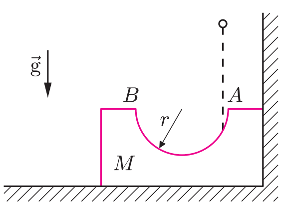
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 763. Dwa jednakowe ciężarki A i B połączone są nicią długości l (rys. 1). W chwili początkowej ciężarek A leży na stole o wysokości l, ciężarek B wisi na nici na wysokości $2l/3$. Ciężarki zaczynają się poruszać. Dotknąwszy podłogi, ciężarek B przykleja się do niej, a w chwilę później ciężarek A spada ze stołu. Na jakiej wysokości nad podłogą będzie się znajdował ciężarek A w chwili, gdy nić znowu stanie się napięta?
Rozwiązanie na str. 17



Rys. 1

F 764. Prostopadłościenna cegła o masie M ma walcowe wgłębienie o promieniu $r = 20$ cm (rys. 2) i stoi ściśle przy pionowej ściance. Z jakiej maksymalnej wysokości nad cegłą, nad prawym brzegiem wgłębienia, można upuścić kamyczek o masie $m = M/5$, żeby nie wydostał się on poza leżący na drugim końcu wgłębienia punkt B? Tarcie zaniedbać.
Rozwiązanie na str. 17



Rys. 2

Redaguje Waldemar POMPE

M 1276. Liczby rzeczywiste a oraz b spełniają równości

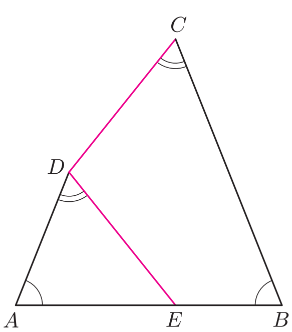
$$a^3 - 3a^2 + 5a = 1 \quad \text{oraz} \quad b^3 - 3b^2 + 5b = 5.$$

Wyznaczyć $a + b$.
Rozwiązanie na str. 24

M 1277. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC \quad \text{oraz} \quad BC = 2AD.$$

Na boku AB tego czworokąta wybrano taki punkt E, że $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BCD$. Dowieść, że $CD = DE$.
Rozwiązanie na str. 17



Rys. 3

M 1278. Dana jest taka liczba naturalna n, dla której liczba $n + 1$ jest podzielna przez 24. Wykazać, że suma wszystkich dodatnich dzielników liczby n jest podzielna przez 24.
Rozwiązanie na str. 3