Zobaczyć chaos: potęga intelektu (nie moc obliczeniowa)

Jarosław GÓRNICKI[*]

Przypomnijmy definicje trzech przekształceń odcinka $[0,1]$ w niego samego, którymi zajmowaliśmy się w pierwszej części artykułu (*Delta* 1/2010).

Wartość *przesunięcia Bernoulliego* liczby $x \in [0,1]$ obliczamy, usuwając z rozwinięcia dwójkowego tej liczby pierwszą cyfrę po przecinku:

$$B((0,a_1a_2a_3a_4\ldots)_2) = (0,a_2a_3a_4\ldots)_2.$$

Przekształcenie piłokształtne P definiujemy następująco: na odcinku $[0,\frac{1}{2})$ jest ono zadane wzorem $P(x) = 2x$, natomiast na odcinku $[\frac{1}{2},1]$ przyjmujemy $P(x) = 2x-1$. Wykres przekształcenia P składa się z dwóch równoległych odcinków.

Przekształcenie namiotowe T zadajemy wzorem $T(x) = 1-|1-2x|$. Na odcinkach $[0,\frac{1}{2}]$ i $[\frac{1}{2},1]$ jest ono liniowe – najpierw rosnące, a później malejące, więc wykres przypomina namiot.

W poprzedniej części artykułu (*Delta* 1/2010) omówiliśmy działanie dwóch różnych przekształceń $P,T:[0,1]\to[0,1]$. Używając dwójkowego systemu obliczeń (tu też będziemy z niego korzystać), wskazaliśmy podobieństwa między nimi. Wykażemy teraz, że przekształcenia te generują chaotyczne przemieszczanie się punktów w odcinku $(0,1)$.

Chaotycznie – to znaczy jak?

Przyglądanie się zjawiskom, w których nie udaje się dostrzec jakiejś dominującej regularności, przewidywalności, skłania nas do mówienia o nich, że są chaotyczne. Z punktu widzenia matematyki potrzebna jest precyzyjna definicja zjawisk chaotycznych – na przykład lista własności, które muszą one spełniać. Jednak dotychczas nie wypracowano jednego poglądu w tej sprawie (zob. [1]). Jedni większą wagę przypisują własnościom lokalnym, a inni poszukują charakteryzacji globalnych. Pokazuje to, jak trudny i nieuchwytny jest to problem.

Dość rozpowszechniona jest propozycja Roberta L. Devaneya (z 1986 r.), by za chaotyczne uznawać takie zjawiska, które:

- są *tranzytywne* (czyli mają tzw. *własność rozprzestrzeniania*),
- mają *gęsty* zbiór punktów okresowych,
- są wrażliwe na zmianę warunków początkowych.

Zdefiniujemy te pojęcia dla przekształcenia $S:[0,1]\to[0,1]$.

Własność tranzytywności (rozprzestrzeniania) oznacza, że dla dowolnej pary niepustych zbiorów otwartych $A,B\subset[0,1]$ istnieje taka liczba naturalna n, że $S^n(A)\cap B\neq\emptyset$.

Podzbiór odcinka $[0,1]$ jest otwarty, jeśli jest sumą przedziałów otwartych (czyli odcinków bez końców), być może nieskończenie wielu, oraz ewentualnie przedziałów $[0,x)$ i $(y,1]$ dla pewnych $x,y\in(0,1)$.

Warunek ten oznacza, że trajektorie, czyli ciągi kolejnych obrazów danego punktu, rozpoczynające się w jakimkolwiek zbiorze otwartym A, są „rozsyłane" na cały zbiór $[0,1]$ – do każdego zbioru otwartego $B\subset[0,1]$ trafi jakaś trajektoria zapoczątkowana w zbiorze A.

Gęstość punktów okresowych odwzorowania S oznacza, że w dziedzinie $[0,1]$ punkty okresowe tworzą zbiór gęsty, czyli każdy punkt $x\in[0,1]$ jest granicą pewnego ciągu punktów okresowych. Przypomnijmy, że punkt $x\in[0,1]$ nazywamy *okresowym* względem przekształcenia S, gdy istnieje taka liczba naturalna $k\geqslant 1$, że $S^k(x)=x$. Najmniejszą liczbę k o tej własności nazywamy *okresem podstawowym* punktu x. Orbity punktów okresowych są zbiorami skończonymi.

Dobrym przykładem zbioru gęstego jest zbiór liczb wymiernych zawartych w odcinku $[0,1]$.

Własność wrażliwości odwzorowania S oznacza, że istnieje taka stała $\delta>0$, że dla każdego $x\in[0,1]$ i każdego otoczenia $\mathcal{O}$ punktu x istnieje punkt $y\in\mathcal{O}$ oraz istnieje taka liczba naturalna n, że

$$|S^n(x)-S^n(y)|\geqslant\delta$$

(stała δ bywa nazywana *stałą wrażliwości* przekształcenia S).

Otoczenie punktu x to zbiór zawierający pewien zbiór otwarty, do którego należy x. Można powiedzieć, że to zbiór, który zawiera x, ale nie na brzegu.

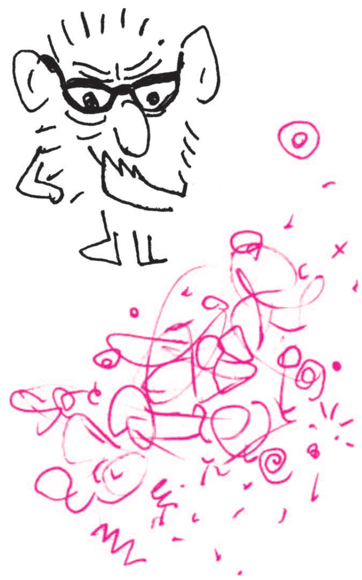
Innymi słowy, w każdym otwartym podzbiorze zbioru $[0,1]$ istnieją dowolnie bliskie punkty x i y, których trajektorie po pewnym czasie znacznie się od siebie oddalają (być może tylko na chwilę). Przyszłość trajektorii przekształcenia wrażliwego zależy mocno od jej stanu początkowego. Wystarczy drobne zaburzenie, a historia (trajektoria) potoczy się zupełnie inaczej…

Podkreślmy, że własności charakteryzujące chaos w sensie Devaneya nie są do końca niezależne. W wyniku przeprowadzonych badań wiemy, że w pewnych sytuacjach, np. w przypadku jednowymiarowym, tranzytywność implikuje dwie pozostałe własności, a w dość ogólnym przypadku (dla przekształceń ciągłych na przestrzeniach metrycznych) tranzytywność wraz z istnieniem gęstego zbioru punktów okresowych gwarantuje wrażliwość na warunki początkowe (zostało to odkryte w 1992 r.).

Z „reklamowego" punktu widzenia fakt ten jest kłopotliwy: wrażliwość na warunki początkowe – najbardziej intuicyjna i najbardziej poglądowa własność – nie jest istotną charakteryzacją chaosu!

[*]Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska

Najważniejsza jest tranzytywność – gwarancja, że z każdego otwartego podzbioru, idąc wzdłuż trajektorii jego punktów, można się dostać dowolnie blisko każdego punktu z całego zbioru.



Ponadto, ponieważ pierwsze dwie własności (tranzytywność, gęstość punktów okresowych) mają charakter topologiczny, a wrażliwość na warunki początkowe ma charakter metryczny, więc

chaos jest własnością topologiczną.

Przekształcenia P oraz T są chaotyczne.
Wykażemy teraz (bezpośrednimi rachunkami, bez użycia komputerów!), że przekształcenia P oraz T spełniają każdy z wymienionych warunków: mają własność tranzytywności, gęste zbiory punktów okresowych i są wrażliwe na warunki początkowe. Pokażemy w ten sposób, że ruch punktów na odcinku $[0,1]$, generowany przez te przekształcenia, jest chaotyczny w sensie Devaneya.

W poniższych uzasadnieniach wielokrotnie będziemy korzystać z następującej obserwacji:

$(*)$ jeśli liczby x, y należą do odcinka jednostkowego i ich rozwinięcia binarne $x = (0{,}x_1x_2\ldots)_2$, $y = (0{,}y_1y_2\ldots)_2$ mają pierwsze k cyfr takie same, tzn. $x_i = y_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$, to wtedy $|x - y| \leqslant 2^{-k}$.

Tranzytywność
(P) Weźmy dwa dowolne przedziały otwarte $A, B \subset [0,1]$. Wybierzmy $b \in B$ o reprezentacji binarnej $b = (0{,}b_1b_2b_3b_4\ldots)_2$. Wybierzmy teraz liczbę wymierną $a \in A$ o skończonej reprezentacji binarnej $a = (0{,}a_1a_2a_3\ldots a_p)_2$ i taką, by liczba postaci

$$z = (0{,}a_1a_2a_3\ldots a_p00\ldots0b_1b_2b_3b_4\ldots)_2$$

należała do zbioru A – między a_p i b_1 wstawiamy tyle zer, by z obserwacji $(*)$ można było wnioskować, że $z \in A$.

Pamiętając, że przekształcenie piłokształtne w zapisie binarnym jest identyczne z przesunięciem Bernoulliego, zauważamy, że $P^m(z) = b$ dla dostatecznie dużej liczby naturalnej m (czyli po obcięciu wszystkich cyfr rozwinięcia przed b_1). Przekształcenie P jest więc tranzytywne.

(T) Dla przedziałów otwartych $I, J \subset [0,1]$ możemy znaleźć odpowiednio dużą liczbę naturalną n oraz ciągi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$, gdzie $a_i, b_i \in \{0,1\}$, takie że wszystkie liczby o reprezentacji binarnej rozpoczynającej się od $(0{,}a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots)_2$ należą do przedziału I, a liczby o reprezentacji binarnej zaczynającej się od $(0{,}b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots)_2$ należą do przedziału J. Możliwość takiego wyboru jest konsekwencją faktu, że rozwinięcia binarne liczb, które są identyczne na n pierwszych pozycjach, a potem są dowolne, wypełniają przedział postaci $[q\cdot 2^{-n}, (q+1)\cdot 2^{-n}]$ dla pewnego $0 \leqslant q < 2^n$. Długość tego przedziału wynosi $1/2^n$.

Wówczas, jeśli $a_n = 0$, to bierzemy $z_0 = (0{,}a_1a_2\ldots a_{n-1}0b_1b_2\ldots b_n)_2 \in I$. Wtedy

$$z_n = T^n(z_0) = T(P^{n-1}(z_0)) = (0{,}b_1b_2\ldots b_n)_2 \in J.$$

Jeśli $a_n = 1$, to bierzemy $z_0 = (0{,}a_1a_2\ldots a_{n-1}1b_1^*b_2^*\ldots b_n^*)_2 \in I$. Wtedy

$$z_n = T^n(z_0) = T(P^{n-1}(z_0)) = (0{,}b_1b_2\ldots b_n)_2 \in J.$$

T jest więc przekształceniem tranzytywnym.

Gęstość zbioru punktów okresowych

Napis $0{,}\overline{abc}$ oznacza ułamek o okresie abc.

(P) Jeżeli $z = (0{,}a_1a_2a_3\ldots)_2$, to wybieramy $a = (0{,}\overline{a_1a_2\ldots a_k})_2$ dla pewnego k. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
P(a) &= (0{,}a_2a_3\ldots a_k\overline{a_1a_2\ldots a_k})_2,\\
P^2(a) &= (0{,}a_3\ldots a_k\overline{a_1a_2\ldots a_k})_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P^{k-1}(a) &= (0{,}a_k\overline{a_1a_2\ldots a_k})_2,\\
P^k(a) &= (0{,}\overline{a_1a_2\ldots a_k})_2 = a.
\end{aligned}$$

Liczba a jest więc punktem okresowym przekształcenia P. Ponieważ liczby z i a różnią się o nie więcej niż 2^{-k}, więc z można dowolnie dobrze przybliżać punktami okresowymi przekształcenia P, czyli zbiór punktów okresowych P jest zbiorem gęstym w przedziale $[0,1]$.

(T) Pokażemy najpierw, że punkty k-okresowe przekształcenia P wyznaczają punkty k-okresowe przekształcenia T. Niech $w \in (0,1)$ będzie punktem okresowym przekształcenia P o okresie k, tj. $w = P^k(w)$. Wtedy punkt $z = T(w)$ jest k-okresowym punktem przekształcenia T:

$$T^k(z) = T^k(T(w)) = T^{k+1}(w) = T(P^k(w)) = T(w) = z.$$

Aby wykazać gęstość zbioru punktów okresowych dla T, pokażemy, że możemy znaleźć punkty okresowe, których rozwinięcia binarne zaczynają się od dowolnej sekwencji $a_1, a_2, \ldots, a_n$, gdzie $a_i \in \{0,1\}$. Punkt $w = (0{,}\overline{0a_1a_2\ldots a_n})_2 < 1/2$ jest punktem okresowym dla P o okresie $n+1$, zatem $z = T(w) = (0{,}\overline{a_1a_2\ldots a_n0})_2$ jest punktem okresowym dla T o okresie $n+1$.

Wrażliwość na warunki początkowe

(P) Weźmy liczby $x, y \in [0,1]$, których rozwinięcia binarne

$$x = (0{,}x_1x_2x_3\ldots)_2, \qquad y = (0{,}y_1y_2y_3\ldots)_2$$

różnią się tylko na jednej pozycji k (dostatecznie dalekiej), np. $x_k = 0$ i $y_k = 1$. Wówczas na mocy obserwacji $(*)$ zachodzi $|x-y| < 1/2^{k-1}$. Ponadto

$$|P^{k-1}(x) - P^{k-1}(y)| = \frac{1}{2},$$

bo $P^{k-1}(y) = P^{k-1}(x) + 1/2$. Przekształcenie P jest więc wrażliwe na warunki początkowe (stała wrażliwości $\delta = 1/2$).

(T) Ustalmy n i weźmy reprezentacje binarne liczb różniące się jedynie na pozycji $n+1$:

$$w_0 = (0{,}a_1a_2\ldots a_na_{n+1}a_{n+2}\ldots)_2, \qquad z_0 = (0{,}a_1a_2\ldots a_na^*_{n+1}a_{n+2}\ldots)_2.$$

Wtedy

$$|w_0 - z_0| < \frac{1}{2^n} \qquad \text{oraz} \qquad |T^n(w_0) - T^n(z_0)| = \frac{1}{2}.$$

Ostatnia równość wynika z następujących obserwacji. Jeśli $a_n = 0$, to

$$w_n = T^n(w_0) = T(P^{n-1}(w_0)) = T((0{,}0a_{n+1}a_{n+2}\ldots)_2) = (0{,}a_{n+1}a_{n+2}\ldots)_2,$$

$$z_n = T^n(z_0) = T(P^{n-1}(z_0)) = T((0{,}0a^*_{n+1}a_{n+2}\ldots)_2) = (0{,}a^*_{n+1}a_{n+2}\ldots)_2.$$

Gdy $a_{n+1} = 0$, to $w_n < 1/2$ i $z_n = w_n + 1/2$. Gdy $a_{n+1} = 1$, to $z_n < 1/2$ i $w_n = z_n + 1/2$.

Jeśli $a_n = 1$, to mamy sytuację analogiczną:

$$w_n = T^n(w_0) = T(P^{n-1}(w_0)) = T((0{,}1a_{n+1}a_{n+2}\ldots)_2) = (0{,}a^*_{n+1}a^*_{n+2}\ldots)_2,$$

$$z_n = T^n(z_0) = T(P^{n-1}(z_0)) = T((0{,}1a^*_{n+1}a_{n+2}\ldots)_2) = (0{,}a_{n+1}a^*_{n+2}\ldots)_2.$$

Przekształcenie T jest więc wrażliwe na warunki początkowe ze stałą wrażliwości $\delta = 1/2$.

Epilog

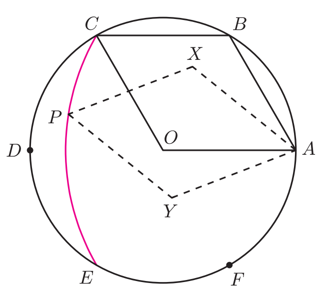
Zobaczyliśmy, że przekształcenie piłokształtne oraz przekształcenie namiotowe przemieszczają punkty w przedziale $(0,1)$ w sposób chaotyczny według definicji Devaneya. Okazuje się, że taka kombinacja „rozciągania i składania (nakładania)" prowadzi do ruchu chaotycznego dla ogólnych nieliniowych odwzorowań odcinka $[0,1]$ w siebie.

W szczególności fakt, że przekształcenie T prowadzi do chaosu w zbiorze $(0,1)$, pozwala wykazać, że to samo robi dla $c=4$ tzw. *funkcja logistyczna* $f_c(x) = cx(1-x)$, gdzie $x \in [0,1]$, $c \in [0,4]$ (jej wersja dyskretna: $y_{n+1} = cy_n(1-y_n)$, $n = 0,1,2,\ldots$, zależna jest od wyboru y_0 i c). Na funkcje kwadratowe f_c zwrócił uwagę P. R. Verhulst w 1838 r. Pojawiają się one np. w analizach demograficznych opisujących wzrost liczbowy populacji oraz w matematyce finansowej.

Równoważność iteracji przekształcenia namiotowego T i przekształcenia kwadratowego $4x(1-x)$ na odcinku $[0,1]$ dana jest za pomocą nieliniowej zamiany współrzędnych

$$h : [0,1] \to [0,1], \qquad h(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

Rozwiązanie zadania M 1274.
Przypuśćmy, że istnieje kolorowanie niespełniające tezy zadania. Niech O oznacza środek koła oraz niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem foremnym o boku 1 wpisanym w dane koło.



Przyjmijmy, że punkt O jest zielony. Wówczas punkt A jest niebieski, a więc B musi być czerwony, C – niebieski, D – czerwony, E – niebieski, F – czerwony. Rozpatrzmy łuk ℓ o środku A i promieniu AC leżący wewnątrz danego koła. Ponieważ długość odcinka CE jest większa niż 1, więc na łuku ℓ musi istnieć punkt P, który nie jest niebieski.

Niech $AXPY$ będzie obrazem rombu $ABCO$ przy takim obrocie o środku A, który przeprowadza punkt C na punkt P. Ponieważ punkty A i P są różnych kolorów, więc punkty X i Y muszą być tego samego koloru. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż długość odcinka XY wynosi 1.

w tym sensie, że wyznaczenie orbity punktu x względem przekształcenia T jest identyczne z wyznaczeniem orbity punktu $y = h(x)$ względem funkcji f_4:

$$f_4^n(h(x)) = h(T^n(x)), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

dla wszystkich $x \in [0, 1]$ (szczegóły zobaczyć można w [2, 3]). Zadziwiające jest, że dla $0 < c < 4$ funkcje kwadratowe f_c okazują się bardzo oporne na próby ich szczegółowego badania.

Zjawiska chaotyczne zdają się być nieodłącznym elementem otaczającej nas rzeczywistości i naszej kultury. Odkrywanie ich, zrozumienie ich istoty, to ważne i fascynujące wyzwanie. *Chaos* intryguje ludzi od Starożytności. Poeta Hezjod już w VII wieku p.n.e. głosił w *Theogonii*, że „na początku powstał Chaos (...) w Chaosie znajdują się źródła i krańce wszystkich rzeczy...".

Literatura

[1] D. Kwietniak, P. Oprocha, *Teoria chaosu w ujęciu matematycznym*, Matematyka Stosowana 9 (50) (2008), 1–45.

[2] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Granice chaosu, fraktale*, t. II, WN PWN, Warszawa 1996.

[3] T. M. Sękowski, *Zagadnienia matematycznej teorii chaosu*, Wyd. UMCS, Lublin 2007.

O pewnym zadaniu, czyli jak działy matematyki przenikają się

Michał PILIPCZUK *

Podczas drugiego etapu LIX Olimpiady Matematycznej uczestnicy zmierzyli się z następującym zadaniem:

W każdym polu kwadratowej tablicy o rozmiarach $n \times n$ napisana jest liczba całkowita. Możemy wielokrotnie wykonywać następującą operację: wybieramy dowolne pole tabeli i zmniejszamy wpisaną weń liczbę o liczbę pól sąsiednich (mających wspólny bok z wybranym polem), każdą zaś z liczb wpisanych w pola sąsiednie zwiększamy o 1. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ rozstrzygnąć, czy z dowolnej początkowej tabeli, w której suma wszystkich n^2 liczb jest równa zeru, można otrzymać tabelę składającą się z samych zer.

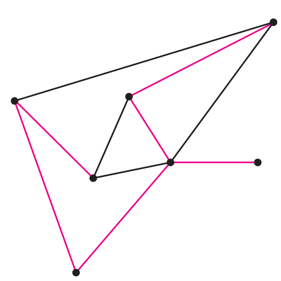
Przekładając treść na język intuicji, mamy do dyspozycji kwadratową tablicę liczb całkowitych, których suma jest zerowa, a w jednym ruchu można naraz „poprzesuwać jedynki" z pewnego pola na każde z pól sąsiednich. Zadanie sprowadza się zatem do stwierdzenia, czy za pomocą takich operacji można zawsze dojść do tablicy całkowicie wyzerowanej.

Wersję zaprezentowaną zawodnikom można rozwiązać, używając prostych metod niezmiennikowych. Czytelnik jednak z pewnością zauważy, że tę grę można na wiele sposobów uogólniać.

W tym miejscu warto zajrzeć do *deltoidu* w tym numerze i numerze 7/2009.

Naturalnym sposobem uogólnienia jest rozważenie dowolnego grafu nieskierowanego zamiast tablicy, na której rozpatrywaliśmy relację sąsiedztwa pól wzdłuż wspólnych boków. Mamy zatem graf, w którego wierzchołkach zostały umieszczone liczby całkowite tak, by ich suma była zerowa – taki sposób rozmieszczenia będziemy nazywać stanem. W jednym ruchu możemy poprzesuwać po jedynce z ustalonego wierzchołka do wszystkich wierzchołków sąsiednich. Łatwo sprawdzić, że wykonanie takiej operacji we wszystkich wierzchołkach oprócz jednego jest dokładnie operacją odwrotną do opisanej, zastosowaną na ominiętym wierzchołku. Powiemy, że dwa stany się komunikują, jeśli za pomocą tych operacji można przejść z jednego do drugiego. Wówczas zbiór stanów rozpada się na pewną liczbę klas parami komunikujących się stanów.

Drzewo rozpinające grafu G to drzewo, którego wierzchołki to wszystkie wierzchołki G, a krawędzie są wybrane spośród krawędzi G. Ponieważ musi zawierać wszystkie wierzchołki G, to można powiedzieć, że jest to największe drzewo, które mieści się w grafie G. Na rysunku 1 krawędzie przykładowego drzewa rozpinającego grafu są kolorowe.



Rys. 1

Tu dochodzimy do kolejnego, naturalnego pytania: *ile jest takich klas*? Czy zawsze jest ich skończenie wiele? Dla grafu niespójnego na pewno nie – tam niezmiennikiem jest suma liczb w każdej spójnej składowej, a istnieje nieskończenie wiele różnych sposobów określenia tych sum tak, żeby liczby z całego grafu sumowały się do zera.

A jak to jest dla grafów spójnych? Otóż okazuje się, że w przypadku grafów spójnych klas będzie zawsze skończenie wiele i dodatkowo dokładnie tyle, ile... drzew rozpinających grafu!

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW