w tym sensie, że wyznaczenie orbity punktu x względem przekształcenia T jest identyczne z wyznaczeniem orbity punktu $y = h(x)$ względem funkcji f_4:

$$f_4^n(h(x)) = h(T^n(x)), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

dla wszystkich $x \in [0, 1]$ (szczegóły zobaczyć można w [2, 3]). Zadziwiające jest, że dla $0 < c < 4$ funkcje kwadratowe f_c okazują się bardzo oporne na próby ich szczegółowego badania.

Zjawiska chaotyczne zdają się być nieodłącznym elementem otaczającej nas rzeczywistości i naszej kultury. Odkrywanie ich, zrozumienie ich istoty, to ważne i fascynujące wyzwanie. *Chaos* intryguje ludzi od Starożytności. Poeta Hezjod już w VII wieku p.n.e. głosił w *Theogonii*, że „na początku powstał Chaos (…) w Chaosie znajdują się źródła i krańce wszystkich rzeczy…".

Literatura

[1] D. Kwietniak, P. Oprocha, *Teoria chaosu w ujęciu matematycznym*, Matematyka Stosowana 9 (50) (2008), 1–45.

[2] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Granice chaosu, fraktale*, t. II, WN PWN, Warszawa 1996.

[3] T. M. Sękowski, *Zagadnienia matematycznej teorii chaosu*, Wyd. UMCS, Lublin 2007.

O pewnym zadaniu, czyli jak działy matematyki przenikają się

*Michał PILIPCZUK**

Podczas drugiego etapu LIX Olimpiady Matematycznej uczestnicy zmierzyli się z następującym zadaniem:

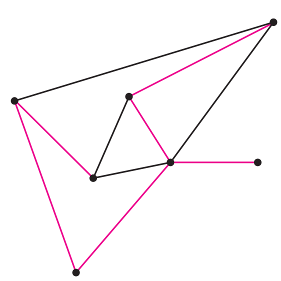
W każdym polu kwadratowej tablicy o rozmiarach $n \times n$ napisana jest liczba całkowita. Możemy wielokrotnie wykonywać następującą operację: wybieramy dowolne pole tabeli i zmniejszamy wpisaną weń liczbę o liczbę pól sąsiednich (mających wspólny bok z wybranym polem), każdą zaś z liczb wpisanych w pola sąsiednie zwiększamy o 1. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ rozstrzygnąć, czy z dowolnej początkowej tabeli, w której suma wszystkich n^2 liczb jest równa zeru, można otrzymać tabelę składającą się z samych zer.

Przekładając treść na język intuicji, mamy do dyspozycji kwadratową tablicę liczb całkowitych, których suma jest zerowa, a w jednym ruchu można naraz „poprzesuwać jedynki" z pewnego pola na każde z pól sąsiednich. Zadanie sprowadza się zatem do stwierdzenia, czy za pomocą takich operacji można zawsze dojść do tablicy całkowicie wyzerowanej.

W tym miejscu warto zajrzeć do *deltoidu* w tym numerze i numerze 7/2009.

Wersję zaprezentowaną zawodnikom można rozwiązać, używając prostych metod niezmiennikowych. Czytelnik jednak z pewnością zauważy, że tę grę można na wiele sposobów uogólniać.

Drzewo rozpinające grafu G to drzewo, którego wierzchołki to wszystkie wierzchołki G, a krawędzie są wybrane spośród krawędzi G. Ponieważ musi zawierać wszystkie wierzchołki G, to można powiedzieć, że jest to największe drzewo, które mieści się w grafie G. Na rysunku 1 krawędzie przykładowego drzewa rozpinającego grafu są kolorowe.



Rys. 1

Naturalnym sposobem uogólnienia jest rozważenie dowolnego grafu nieskierowanego zamiast tablicy, na której rozpatrywaliśmy relację sąsiedztwa pól wzdłuż wspólnych boków. Mamy zatem graf, w którego wierzchołkach zostały umieszczone liczby całkowite tak, by ich suma była zerowa – taki sposób rozmieszczenia będziemy nazywać stanem. W jednym ruchu możemy poprzesuwać po jedynce z ustalonego wierzchołka do wszystkich wierzchołków sąsiednich. Łatwo sprawdzić, że wykonanie takiej operacji we wszystkich wierzchołkach oprócz jednego jest dokładnie operacją odwrotną do opisanej, zastosowaną na ominiętym wierzchołku. Powiemy, że dwa stany się komunikują, jeśli za pomocą tych operacji można przejść z jednego do drugiego. Wówczas zbiór stanów rozpada się na pewną liczbę klas parami komunikujących się stanów.

Tu dochodzimy do kolejnego, naturalnego pytania: *ile jest takich klas*? Czy zawsze jest ich skończenie wiele? Dla grafu niespójnego na pewno nie – tam niezmiennikiem jest suma liczb w każdej spójnej składowej, a istnieje nieskończenie wiele różnych sposobów określenia tych sum tak, żeby liczby z całego grafu sumowały się do zera.

A jak to jest dla grafów spójnych? Otóż okazuje się, że w przypadku grafów spójnych klas będzie zawsze skończenie wiele i dodatkowo dokładnie tyle, ile… drzew rozpinających grafu!

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

Aby przeprowadzić szkic dowodu tego faktu, będziemy musieli powołać się na twierdzenie Kirchhoffa. Już samo jego sformułowanie brzmi jak połączenie przepisu kulinarnego z magiczną sztuczką.

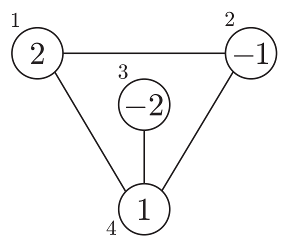
Niech G będzie n-wierzchołkowym grafem nieskierowanym. Jego wierzchołki oznaczmy przez $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Niech $A = (a_{ij})$ będzie macierzą $n \times n$, taką że:

- *wyraz a_{ii} jest równy stopniowi wierzchołka v_i,*
- *dla $i \neq j$ wyraz a_{ij} jest równy -1, jeśli v_i i v_j są połączone krawędzią, oraz 0 w przeciwnym przypadku.*

Niech $\bar{A}$ będzie macierzą A z wyrzuconym dowolnym wierszem i kolumną o tym samym numerze. Wówczas wyznacznik $\det \bar{A}$ jest równy liczbie drzew rozpinających grafu G.

Macierz A jest nazywana laplasjanem grafu. Dowód twierdzenia Kirchhoffa jest czysto algebraiczny – wyznacznik $\bar{A}$ przedstawiamy jako sumę kwadratów wyznaczników pewnej liczby macierzy. Każda z tych macierzy odpowiada pewnemu wyborowi $n-1$ krawędzi grafu. Okazuje się, że macierze te mają wyznacznik ± 1, jeśli wybór zadaje drzewo rozpinające, 0 zaś w przeciwnym przypadku. Sumując kwadraty takich wyznaczników, otrzymujemy liczbę drzew rozpinających.

Spróbujmy teraz algebraicznie podejść do naszej gry w przesuwanie jedynek. Wierzchołki grafu numerujemy liczbami od 1 do n i oznaczamy dalej przez $v_1, \ldots, v_n$. Stany będziemy kodować jako układy $n-1$ liczb całkowitych, czyli elementy kraty $\mathbb{Z}^{n-1}$ (najłatwiej o nich myśleć jako o punktach w przestrzeni $\mathbb{R}^{n-1}$ o wszystkich współrzędnych całkowitych). Stan zakodujemy, zapisując na i-tej współrzędnej liczbę wpisaną w i-ty wierzchołek. Ponieważ suma liczb wpisanych jest zerowa, więc liczba umieszczona w ominiętym wierzchołku v_n jest wyznaczona jednoznacznie jako liczba przeciwna do sumy pozostałych. Teraz należy zastanowić się, jak po zakodowaniu wyglądać będą dozwolone operacje. Operacja (dla ustalenia uwagi, odwrotna do opisanej) w wierzchołku v_i dla $i \leqslant n-1$ odpowiada przesunięciu się o wektor mający $\deg v_i$ na i-tej współrzędnej, -1 na wszystkich współrzędnych odpowiadających sąsiadom (oprócz v_n) oraz 0 na pozostałych współrzędnych. Brzmi znajomo. Opisane $n-1$ operacji odpowiadających wierzchołkom v_i dla $1 \leqslant i \leqslant n-1$ wyznacza nam $n-1$ wektorów, o które możemy się poruszać do przodu lub do tyłu. Operację w wierzchołku v_n da się uzyskać poprzez użycie wszystkich innych. Zatem dwa stany komunikują się, jeśli można przejść pomiędzy odpowiadającymi im elementami w $\mathbb{Z}^{n-1}$, poruszając się wzdłuż tych $n-1$ wektorów.



Rys. 2. Przykładowy stan w grafie o laplasjanie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

W kracie $\mathbb{Z}^3$ opisujemy go poprzez trójkę $(2, -1, -2)$. Operacje (odwrotne) w wierzchołkach $1, 2, 3$ odpowiadają dodawaniu wektorów $(2, -1, 0)$, $(-1, 2, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Teraz trzeba sobie zadać pytanie, ile będzie szukanych klas. Chwila zastanowienia pozwala stwierdzić, że jest to bardzo proste. Nasze $n-1$ wektorów rozpina pewien równoległościan w kracie $\mathbb{Z}^{n-1}$. Wówczas każdy punkt kratowy wewnątrz równoległościanu zadaje inną klasę. Punktów kratowych wewnątrz jest zaś dokładnie tyle, ile wynosi objętość równoległościanu. Fakty te niewątpliwie wymagają bardziej szczegółowego sprawdzenia, ale wykonanie odpowiednich obliczeń dla przykładu wektorów $(2, 0)$ i $(0, 2)$ w kracie $\mathbb{Z}^2$ powinno rozwiać wszelkie wątpliwości co do ich prawdziwości.

Objętość równoległościanu jest równa wyznacznikowi macierzy utworzonej przez wpisanie w wiersze wektorów go rozpinających. Łatwo zauważyć, że macierz ta jest dokładnie macierzą $\bar{A}$ z twierdzenia Kirchhoffa! Wobec tego jego zastosowanie kończy dowód – liczba klas jest równa objętości równoległościanu, czyli wyznacznikowi, o którym wiemy, że jest równy liczbie drzew rozpinających.

Wydaje się, że zarówno sformułowanie gry, jak i pojęcie drzewa rozpinającego są czysto kombinatoryczne. Musieliśmy jednak przejść przez sporą dawkę algebry, aby pokazać wzajemne relacje między nimi. Pokazuje to dość często spotykane zjawisko w kombinatoryce – aby uchwycić pewną własność, musimy umieć spojrzeć na problem z dużo szerszej perspektywy i zastosować narzędzia pozornie zupełnie z innej półki.