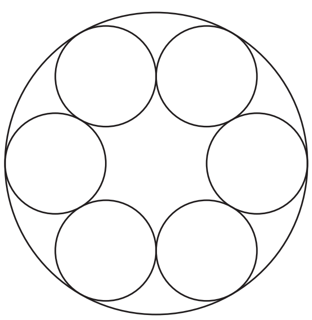
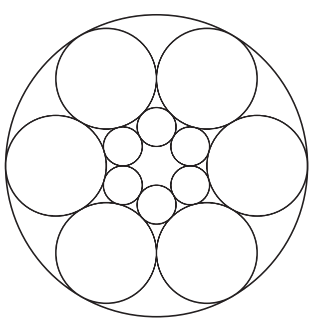
Jeszcze jedno zadanie konstrukcyjne

W pierwszym artykule o rozetach (*Delta* 12/2008) pokazaliśmy, w jaki sposób można skonstruować wewnątrz okręgu serię jednakowych okręgów stycznych do niego wewnętrznie i kolejno do siebie zewnętrznie (zob. rysunek 1). Teraz będziemy chcieli dodać do tych okręgów serię mniejszych okręgów stycznych zewnętrznie zarówno do okręgów pierwszej serii, jak i kolejno do siebie (zob. rysunek 2). Dokładniej, chcemy tę nową serię okręgów skonstruować za pomocą cyrkla i linijki. Widzimy od razu, że środki nowych okręgów będą leżały na promieniach największego okręgu przechodzących przez punkty styczności okręgów pierwszej serii. Z drugiej strony, punkty styczności okręgów mniejszych leżą na promieniach prowadzących do środków okręgów większych. Te dwa warunki wystarczą do przeprowadzenia konstrukcji.



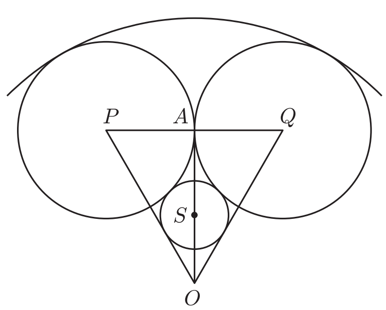
Rys. 1

Popatrzmy dokładniej, jak jest położony jeden z tych mniejszych okręgów. Mamy dwa okręgi pierwszej serii o środkach w punktach P i Q. Okręgi te są styczne zewnętrznie w punkcie A. Środek S poszukiwanego okręgu leży na odcinku OA (punkt O jest środkiem okręgu ograniczającego rozetę); ten poszukiwany okrąg jest zaś styczny do ramion kąta POQ (zob. rysunek 3). Pokażemy trzy różne konstrukcje tego okręgu (wystarczy oczywiście skonstruować jego środek S). Najpierw sprowadzimy nasze zadanie do bardzo znanego zadania, które rozwiążemy dwoma sposobami. Poprowadźmy odcinki KM i LM równoległe odpowiednio do PO i QO, styczne w punktach K i L do danych okręgów o środkach P i Q (zob. rysunek 4). Narysowany przerywaną linią okrąg o środku S i promieniu SP przechodzi przez punkty P i Q oraz jest styczny do ramion kąta KML. Nasze zadanie sprowadza się zatem do bardzo znanego zadania: przez dany punkt położony wewnątrz kąta poprowadzić okrąg styczny do ramion tego kąta.



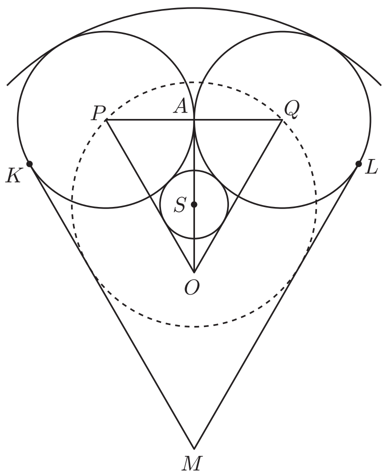
Rys. 2

Pierwszy sposób rozwiązania wykorzystuje podstawowe własności jednokładności. Mamy dany punkt A położony wewnątrz kąta POQ (zob. rysunek 5). Mamy skonstruować okrąg styczny do półprostych OP i OQ, przechodzący przez punkt A. Oczywiście, środek tego okręgu leży na dwusiecznej kąta POQ. Weźmy dowolny okrąg styczny do ramion kąta o środku M położonym na dwusiecznej. Niech półprosta OA przecina ten okrąg w punktach B i C.

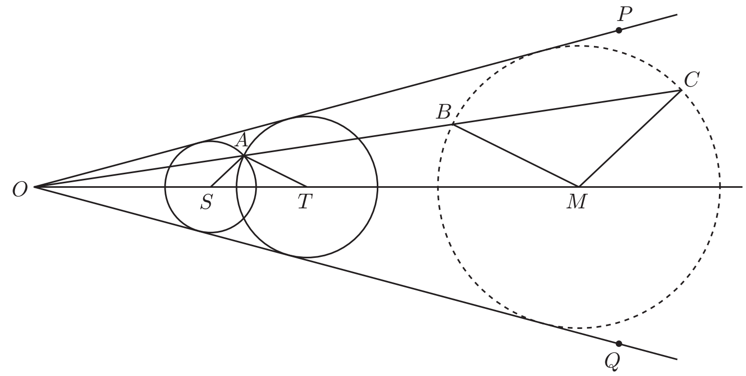


Rys. 3

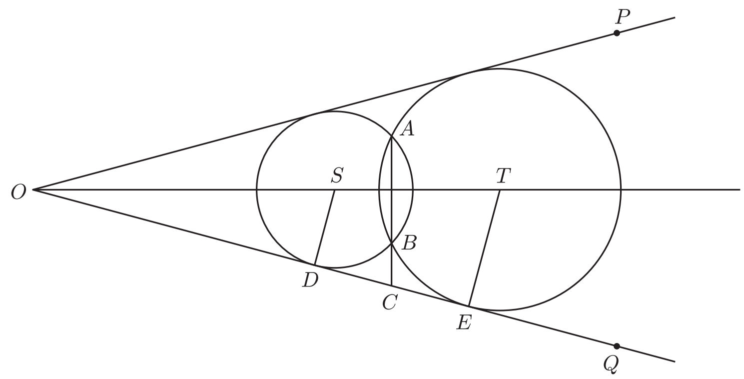
Znajdujemy na dwusiecznej kąta POQ takie punkty S i T, że $AS \parallel CM$ oraz $AT \parallel BM$. Znalezione punkty są środkami dwóch okręgów stycznych do ramion kąta i przechodzących przez punkt A. Nietrudny dowód tego stwierdzenia pozostawimy jako ćwiczenie.



Rys. 4



Rys. 5



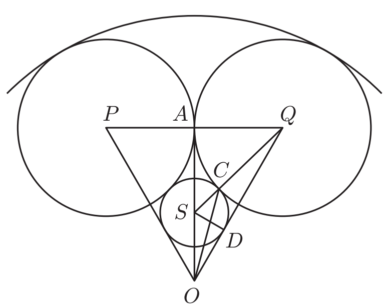
Rys. 6

Drugi sposób konstrukcji wykorzystuje twierdzenie o odcinkach stycznej i siecznej z poprzedniego artykułu (*Delta* 12/2009). Przypuśćmy znów, że punkt A leży wewnątrz kąta POQ (zob. rysunek 6). Okrąg styczny do ramion kąta i przechodzący przez punkt A przechodzi także przez punkt B symetryczny do A względem dwusiecznej kąta.

Niech C będzie punktem przecięcia prostych AB i OQ. Na prostej OQ znajdujemy takie punkty D i E, że

$$CD^2 = CE^2 = CA \cdot CB.$$

Wtedy punkty D i E są punktami styczności okręgów przechodzących przez A i B i stycznych do prostej OQ. Wyznaczenie środków tych okręgów jest już łatwe. Dowód poprawności tej konstrukcji pozostawimy jako ćwiczenie.



Rys. 7

Pokażemy teraz trzeci sposób konstrukcji. Powróćmy do sytuacji zobrazowanej na rysunku 3. Poprowadźmy dwusieczną kąta AOQ; niech przecina ona okrąg o środku Q w punkcie C. Niech S będzie punktem przecięcia prostych QC i OA. Niech wreszcie D będzie rzutem punktu S na prostą OQ. Z podobieństwa trójkątów ODS i OAQ wynika, że

$$\frac{DS}{AQ} = \frac{OS}{OQ}.$$

Z twierdzenia o dwusiecznej (w trójkącie OSQ) dostajemy równość

$$\frac{CS}{CQ} = \frac{OS}{OQ}.$$

Ponieważ $AQ = CQ$, więc $CS = DS$, skąd wynika, że okrąg o środku S i promieniu CS (a więc styczny zewnętrznie do okręgu o środku Q) jest też styczny do prostej OQ. Jest to więc szukany okrąg. Z tej konstrukcji dowiadujemy się również, że punkt styczności C leży na dwusiecznej kąta AOQ.

Małą Deltę przygotował Wojciech GUZICKI