

O rysowaniu zderzeń

Maciej LISICKI*

Zderzenia ciał są jednym z częściej poruszanych tematów na szkolnych lekcjach fizyki, ponieważ są świetnym polem wykorzystania rozmaitych postaci zasad zachowania energii i pędu. Co więcej, można stopniowo komplikować rozpatrywane zagadnienia – przejść od elastycznych zderzeń cząstek punktowych, poprzez niesprężyste zderzenia brył sztywnych, aż po skomplikowane problemy teorii sprężystości, obejmujące szczegółową analizę momentu zderzenia i teorię rozpraszania.

Ograniczmy rozważania do geometrycznego spojrzenia na elastyczne zderzenie punktowych cząstek, wprowadzając zabawne i ciekawe narzędzie do analizy zderzeń. Sprowadzi się to do... rysowania kółek i strzałek.

Rozważmy spoczywającą cząstkę o masie M , która rozpada się samorzutnie na dwie nowe cząstki o równych masach m . Cząstki te poruszają się zatem z równymi prędkościami. Zajmijmy się jedną z nich – niech jej prędkość w układzie spoczywającej cząstki M wynosi \mathbf{v}_0 . Prędkość drugiej wynosi, oczywiście, $-\mathbf{v}_0$.

Czytelnik Wnikliwy zauważy zapewne, że w opisanej tu sytuacji nie jest zachowana całkowita energia, ani całkowita masa! Energia potencjalna wszystkich składników układu jest stale równa zero, energia kinetyczna cząstki przed rozpadem także równa się zero, a energia kinetyczna produktów rozpadu to mv_0^2 . Ten pozorny paradoks wynika z zaniedbania efektów relatywistycznych, tj. równoważności masy i energii.

Przejdźmy teraz do układu laboratoryjnego, w którym cząstka M porusza się z prędkością \mathbf{V} , pierwsza zaś z cząstek m z prędkością \mathbf{v} . Prędkość ta jest, oczywiście, wektorową sumą prędkości w układzie pierwotnej cząstki i prędkości tego układu odniesienia w laboratorium:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_0.$$

Przepisując tę równość w postaci $\mathbf{v} - \mathbf{V} = \mathbf{v}_0$ i stosując twierdzenie cosinusów, otrzymamy związek

$$v^2 + V^2 - 2vV \cos \theta = v_0^2,$$

gdzie θ jest kątem między wektorami \mathbf{v} i \mathbf{V} . Możemy posłużyć się bardzo wygodnym rysunkiem 1 do zobrazowania tej sytuacji. Prędkość \mathbf{v} jest wektorem

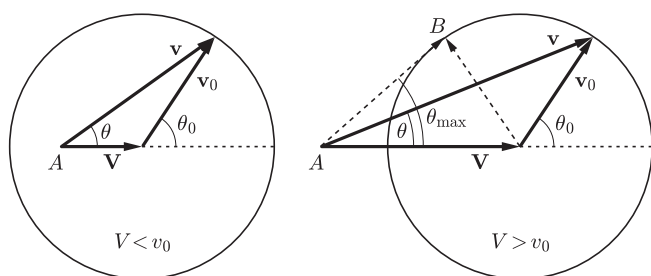
poprowadzonym do dowolnego punktu na obwodzie okręgu z punktu A , odległego od środka okręgu o wektor \mathbf{V} . Promień okręgu jest równy v_0 . Możemy przy tym rozróżnić dwa przypadki. Jeżeli $V < v_0$, czyli punkt A leży wewnątrz okręgu, to kąt θ , pod jakim cząstka opuści układ, jest dowolny. W przypadku $V > v_0$ cząstka może wylecieć tylko do przodu i pod kątem nieprzekraczającym θ_{\max} . Z konstrukcji przedstawionej na rysunku łatwo można przekonać się, że wartość kąta granicznego określa równość

$$\sin \theta_{\max} = \frac{v_0}{V}.$$

Kąt ten odpowiada bowiem stycznej do okręgu w punkcie B , poprowadzonej z A . Takie kąty mierzy, oczywiście, obserwator w układzie laboratoryjnym. Rysunki te mają jeszcze jedną zaletę – możemy łatwo powiązać kąty w układzie środka masy z kątami mierzonymi w układzie laboratoryjnym. Pozostawiając przekształcenia Czytelnikowi, podajemy wynik

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_0 \sin \theta_0}{v_0 \cos \theta_0 + V}.$$

Podobną konstrukcję można wykorzystać przy analizie sprężystego zderzenia dwóch cząstek. Dla uproszczenia założymy, że ich masy są jednakowe. Prędkości cząstek przed zderzeniem będziemy oznaczać przez $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$,



Rys. 1. Geometryczna interpretacja rozpadu cząstki.

*student, Wydział Fizyki,
Uniwersytet Warszawski

a po zderzeniu $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$. Zasady zachowania energii i pędu będą miały postać:

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2, \quad |\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}'_1|^2 + |\mathbf{v}'_2|^2.$$

Najwygodniej będzie wprowadzić nowe zmienne, określające prędkość środka masy układu i względną prędkość ciał

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

oraz analogiczne wielkości po zderzeniu \mathbf{V}' i \mathbf{u}' . Zasady zachowania przyjmą teraz niezwykle prostą postać

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}', \quad |\mathbf{u}| = |\mathbf{u}'|,$$

czyli wektor \mathbf{V} jest niezmiennikiem zderzenia, a wektor \mathbf{u} nie zmienia swojej długości (może jedynie zmienić kierunek), co jest zgodne z intuicją. Podobnie jak poprzednio, można to wygodnie zilustrować rysunkiem 2. W tym przypadku zderzenie sprowadza się wyłącznie do obrotu wektora \mathbf{u} wpisanego w okrąg o promieniu u . Rozumowanie to można uogólnić na przypadek, gdy masy cząstek są różne. Weźmy dwie cząstki poruszające się jak poprzednio, ale o masach m_1 i m_2 . Wprowadzając prędkość względną \mathbf{u} i prędkość środka masy

$$\mathbf{V} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2},$$

znajdujemy prędkości cząstek w układzie środka masy:

$$\mathbf{v}_1^* = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_2^* = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{u}.$$

Z zasady zachowania pędu wiemy, że pędy cząstek w układzie środka masy po zderzeniu są równe i przeciwnie skierowane, z zasady zachowania energii wynika natomiast, że wartości bezwzględne prędkości nie zmieniają się, jedynie zmienia się kierunek (odpowiada to obrotowi na rysunku 2). Możemy w łatwy sposób przejść do układu laboratoryjnego, dodając do każdej z wyliczonych prędkości prędkość \mathbf{V} środka masy:

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{u}' + \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{u}' + \mathbf{V}.$$

Do geometrycznej interpretacji wygodnie jest posłużyć się pędami cząstek. Zdefiniujmy wektor jednostkowy \mathbf{n} w kierunku \mathbf{u}' . Łatwo można przekonać się, że

$$\mathbf{p}'_1 = \mu u \mathbf{n} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{p}'_2 = -\mu u \mathbf{n} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2),$$

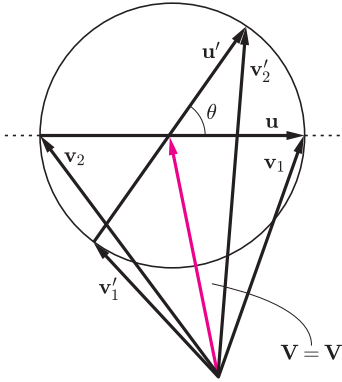
gdzie wprowadziliśmy masę zredukowaną

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

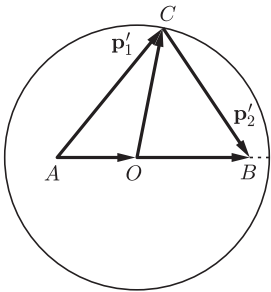
Rozważmy więc okrąg o promieniu μu (rysunek 3). Wektor \vec{OC} odpowiada wektorowi $\mu \mathbf{u}$, zatem powyższe równania można zinterpretować czysto geometrycznie jako dodawanie wektorów. Przy ustalonych początkowych pędach promień koła i położenia punktów A i B nie zmieniają się, natomiast punkt C może swobodnie wędrować po okręgu. Rozważmy szczegółowo przypadek, gdy jedna z cząstek spoczywa (np. ta o masie m_2). Zatem $|\vec{OB}| = \frac{m_2 p_1}{m_1 + m_2} = \mu u$ i odcinek OB pokrywa się z promieniem okręgu. Wektor \vec{AB} pokrywa się, oczywiście, z pędem cząstki o masie m_1 przed zderzeniem. W zależności od stosunku mas punkt A może leżeć wewnątrz lub na zewnątrz okręgu, jak na rysunku 4. Po zderzeniu obie cząstki doznają odchylenia od kierunku pierwotnego ruchu cząstki-pocisku, danego przez kąty θ_1 i θ_2 . W układzie środka masy kąt środkowy χ wyznacza kierunek, pod jakim zostaje rozpraszona nadlatująca cząstka. Ciekawym ćwiczeniem dla Czytelnika może być przekonanie się na podstawie tych rysunków, że kąty θ_1 i θ_2 mogą być wyrażone przez kąt χ :

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}.$$

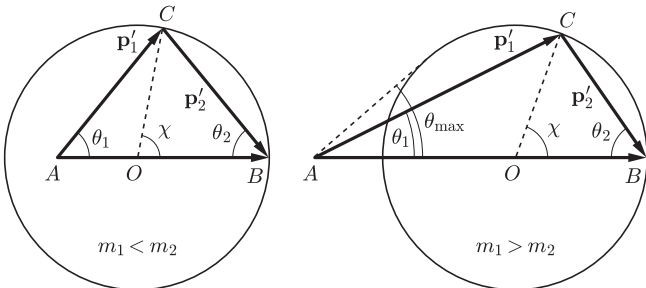
Ponadto zauważmy, że kąt rozrzutu cząstek $\theta_1 + \theta_2$ może być mniejszy lub większy od $\pi/2$, w zależności od stosunku mas. Rozpraszanie do tyłu odpowiada równości $\chi = \pi$.



Rys. 2. Sprężyste zderzenie dwóch cząstek w języku prędkości względnej i prędkości środka masy.



Rys. 3. Ta sama geometria, ale rysujemy pędy; $\vec{OC} = \mu \mathbf{u}'$,
 $\vec{AO} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$,
 $\vec{OB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$.



Rys. 4. Zderzenie pocisku ze spoczywającą cząstką.

Pokazaliśmy, że zjawiska mechaniczne zderzeń ciał mogą mieć bardzo łatwą interpretację geometryczną, a tworzenie takich diagramów jest samo w sobie interesujące. Szczególnie prosto można za pomocą tego narzędzia ustalać pewne zależności między wielkościami mierzonymi w układzie środka masy a ich odpowiednikami w układzie laboratoryjnym.

Na deser zostawmy kilka pytań/propozycji do zabawy:

1. Dla jakiej wartości kąta χ cząstka pierwotnie spoczywająca będzie miała największą energię? Jaka będzie jej wartość, jeśli energia cząstki padającej wynosi E ?
2. Dla $m_1 < m_2$ prędkość pierwszej cząstki po zderzeniu może mieć dowolny kierunek. Jaka jest maksymalna wartość kąta θ_{\max} (wyrażona przez masy cząstek) w przypadku $m_1 > m_2$?

3. Pod jakim kątem rozbiegają się cząstki w przypadku równych mas? Jakie są wtedy θ_1 i θ_2 ?
4. Ambitniejsze zadanie: jak przetłumaczyć przedstawione schematy na przypadek zderzeń niesprężystych, gdy zderzenie charakteryzuje pewien współczynnik strat energii ($\mathbf{u}' = -\alpha\mathbf{u}$, $1 \geq \alpha \geq 0$)?
5. I jeszcze jedno zadanie dla odważnych. Jak zmieniają się wyniki omawiane w tym artykule, jeśli uwzględnić efekty relatywistyczne?

Nierówność Schwarza a fizyka cząstek elementarnych

Ogólniej,

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \stackrel{(S)}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Tomasz TKOCZ*

Czytelnik z pewnością zetknął się z tytułową nierównością Schwarza, która w najprostszym przypadku mówi, że dla liczb rzeczywistych x_1, x_2, y_1, y_2 zachodzi

$$(*) \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Interpretacja geometryczna jest jasna. Chodzi o to, że iloczyn skalarny dwóch wektorów $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2]$ na płaszczyźnie, który wynosi $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$, nie przekracza iloczynu ich długości, bowiem można wartość iloczynu skalarnego obliczyć także jako $|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Często twierdzenia matematyczne mają także przyjemną interpretację fizyczną (np. wiele twierdzeń z rachunku różniczkowego i całkowego). Okazuje się, że nierówność Schwarza (*) jest zaszyta, jak za chwilę zobaczymy, dosyć głęboko w elementarnych prawach mikroświata i relatywistycznych prędkości.

Rozważmy cząstkę elementarną c , która rozpada się na dwie cząstki a i b , poruszające się w przeciwne strony w ich układzie środka masy (np. kaon rozpadający się na parę pionów $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$). Wobec tego, że cząstka c spoczywa, jest intuicyjnie jasne, że masy cząstek spełniają nierówność

$$m_c \geq m_a + m_b.$$

Rzeczywiście, analizując bilans energii w układzie środka masy, stwierdzamy, że energia układu przed reakcją wynosiła $m_c c^2$, po reakcji zaś

$$E_a^* + E_b^* = \sqrt{(m_a c^2)^2 + (p_a^* c)^2} + \sqrt{(m_b c^2)^2 + (p_b^* c)^2} \geq m_a c^2 + m_b c^2,$$

skąd

$$(1) \quad m_c c^2 = E_a^* + E_b^* \geq m_a c^2 + m_b c^2.$$

Ale jak wygląda sytuacja z naszej perspektywy, czyli w układzie laboratorium (w skrócie LAB)? Z transformacji Lorentza mamy

$$(2) \quad \begin{aligned} E_a + E_b &= \gamma(E_a^* + \beta p_a^*) + \gamma(E_b^* + \beta p_b^*) = \\ &= \gamma(E_a^* + E_b^*) + \gamma\beta(p_a^* + p_b^*) = \gamma(E_a^* + E_b^*), \end{aligned}$$

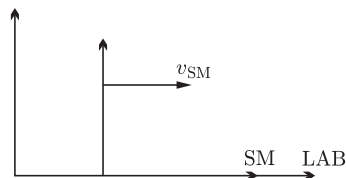
bowiem z definicji układu SM mamy $p_a^* + p_b^* = 0$, przy czym tradycyjnie oznacza się $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, $\beta = v_{SM}/c$. Patrząc na nierówność (1), widzimy, że jej prawa strona jest wyrażona wielkościami znanymi w LAB, lewą zaś możemy tak wyrazić, korzystając z powyższego rachunku (2). Dostajemy

$$(m_a + m_b)c^2 \leq E_a^* + E_b^* = \frac{1}{\gamma}(E_a + E_b) = \sqrt{1 - \left(\frac{v_{SM}}{c}\right)^2} (E_a + E_b),$$

więc pozostaje obliczyć v_{SM}/c . Znowu wystarczy skorzystać z relatywistycznej transformacji energii i pędu (tyle że teraz w drugą stronę, od wielkości z SM

Układ środka masy (w skrócie SM) to taki układ odniesienia, w którym całkowity pęd układu wynosi 0.

Całkowita energia cząstki o masie m i pędzie p wynosi $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$.



Gdy cząstka i układ poruszają się tylko wzdłuż osi x (tak jak w naszym przypadku), to transformacja Lorentza energii i pędu mówi, że

$$\begin{cases} E = \gamma(E^* + \beta p^*), \\ p = \gamma(p^* + \beta E^*/c), \end{cases}$$

gdzie wielkości z gwiazdką odnoszą się do układu środka masy, a bez gwiazdki do układu LAB.

*student, Wydział Fizyki oraz Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski