Pokazaliśmy, że zjawiska mechaniczne zderzeń ciał mogą mieć bardzo łatwą interpretację geometryczną, a tworzenie takich diagramów jest samo w sobie interesujące. Szczególnie prosto można za pomocą tego narzędzia ustalać pewne zależności między wielkościami mierzonymi w układzie środka masy a ich odpowiednikami w układzie laboratoryjnym.

Na deser zostawmy kilka pytań/propozycji do zabawy:

1. Dla jakiej wartości kąta χ cząstka pierwotnie spoczywająca będzie miała największą energię? Jaka będzie jej wartość, jeśli energia cząstki padającej wynosi E?

2. Dla $m_1 < m_2$ prędkość pierwszej cząstki po zderzeniu może mieć dowolny kierunek. Jaka jest maksymalna wartość kąta $\theta_{\max}$ (wyrażona przez masy cząstek) w przypadku $m_1 > m_2$?

3. Pod jakim kątem rozbiegają się cząstki w przypadku równych mas? Jakie są wtedy θ_1 i θ_2?

4. Ambitniejsze zadanie: jak przetłumaczyć przedstawione schematy na przypadek zderzeń niesprężystych, gdy zderzenie charakteryzuje pewien współczynnik strat energii ($\mathbf{u}' = -\alpha\mathbf{u}$, $1 \geqslant \alpha \geqslant 0$)?

5. I jeszcze jedno zadanie dla odważnych. Jak zmienią się wyniki omawiane w tym artykule, jeśli uwzględnić efekty relatywistyczne?

Nierówność Schwarza a fizyka cząstek elementarnych

*Tomasz TKOCZ**

Czytelnik z pewnością zetknął się z tytułową nierównością Schwarza, która w najprostszym przypadku mówi, że dla liczb rzeczywistych x_1, x_2, y_1, y_2 zachodzi

$$(*) \qquad x_1y_1 + x_2y_2 \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Ogólniej,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \overset{(S)}{\leqslant} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Interpretacja geometryczna jest jasna. Chodzi o to, że iloczyn skalarny dwóch wektorów $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2]$ na płaszczyźnie, który wynosi $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2$, nie przekracza iloczynu ich długości, bowiem można wartość iloczynu skalarnego obliczyć także jako $|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Często twierdzenia matematyczne mają także przyjemną interpretację fizyczną (np. wiele twierdzeń z rachunku różniczkowego i całkowego). Okazuje się, że nierówność Schwarza $(*)$ jest zaszyta, jak za chwilkę zobaczymy, dosyć głęboko w elementarnych prawach mikroświata i relatywistycznych prędkości.

Rozważmy cząstkę elementarną c, która rozpada się na dwie cząstki a i b, poruszające się w przeciwne strony w ich układzie środka masy (np. kaon rozpadający się na parę pionów $K^0 \to \pi^+ + \pi^-$). Wobec tego, że cząstka c spoczywa, jest intuicyjnie jasne, że masy cząstek spełniają nierówność

$$m_c \geqslant m_a + m_b.$$

Układ środka masy (w skrócie SM) to taki układ odniesienia, w którym całkowity pęd układu wynosi 0.

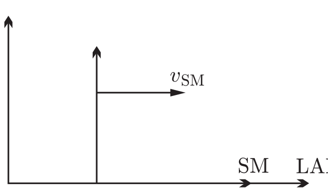
Całkowita energia cząstki o masie m i pędzie p wynosi $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$.

Rzeczywiście, analizując bilans energii w układzie środka masy, stwierdzamy, że energia układu przed reakcją wynosiła m_cc^2, po reakcji zaś

$$E_a^* + E_b^* = \sqrt{(m_ac^2)^2 + (p_a^*c)^2} + \sqrt{(m_bc^2)^2 + (p_b^*c)^2} \geqslant m_ac^2 + m_bc^2,$$

skąd

$$(1) \qquad m_cc^2 = E_a^* + E_b^* \geqslant m_ac^2 + m_bc^2.$$



Ale jak wygląda sytuacja z naszej perspektywy, czyli w układzie laboratorium (w skrócie LAB)? Z transformacji Lorentza mamy

$$(2) \qquad \begin{aligned} E_a + E_b &= \gamma(E_a^* + \beta p_a^*) + \gamma(E_a^* + \beta p_b^*) = \\ &= \gamma(E_a^* + E_b^*) + \gamma\beta(p_a^* + p_b^*) = \gamma(E_a^* + E_b^*), \end{aligned}$$

Gdy cząstka i układ poruszają się tylko wzdłuż osi x (tak jak w naszym przypadku), to transformacja Lorentza energii i pędu mówi, że

$$\begin{cases} E = \gamma(E^* + \beta p^*), \\ p = \gamma(p^* - \beta E/c), \end{cases}$$

gdzie wielkości z gwiazdką odnoszą się do układu środka masy, a bez gwiazdki do układu LAB.

bowiem z definicji układu SM mamy $p_a^* + p_b^* = 0$, przy czym tradycyjnie oznacza się $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v_{\mathrm{SM}}/c$. Patrząc na nierówność (1), widzimy, że jej prawa strona jest wyrażona wielkościami znanymi w LAB, lewą zaś możemy tak wyrazić, korzystając z powyższego rachunku (2). Dostajemy

$$(m_a + m_b)c^2 \leqslant E_a^* + E_b^* = \frac{1}{\gamma}(E_a + E_b) = \sqrt{1 - \left(\frac{v_{\mathrm{SM}}}{c}\right)^2}(E_a + E_b),$$

więc pozostaje obliczyć v_{SM}/c. Znowu wystarczy skorzystać z relatywistycznej transformacji energii i pędu (tyle że teraz w drugą stronę, od wielkości z SM

*student, Wydział Fizyki oraz Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

do LAB)

$$0 = p_a^* + p_b^* = \gamma\Big(p_a - \frac{v_{\mathrm{SM}}}{c^2}E_a\Big) + \gamma\Big(p_b - \frac{v_{\mathrm{SM}}}{c^2}E_b\Big) =$$
$$= \gamma\Big(p_a + p_b - \frac{v_{\mathrm{SM}}}{c^2}(E_a + E_b)\Big),$$

skąd

$$\frac{v_{\mathrm{SM}}}{c} = c\frac{p_a + p_b}{E_a + E_b}.$$

Wracając, mamy nierówność

$$(m_a + m_b)c^2 \leqslant \sqrt{1 - \Big(c\frac{p_a + p_b}{E_a + E_b}\Big)^2}(E_a + E_b) =$$
$$= \sqrt{(E_a + E_b)^2 - (p_a + p_b)^2c^2}.$$

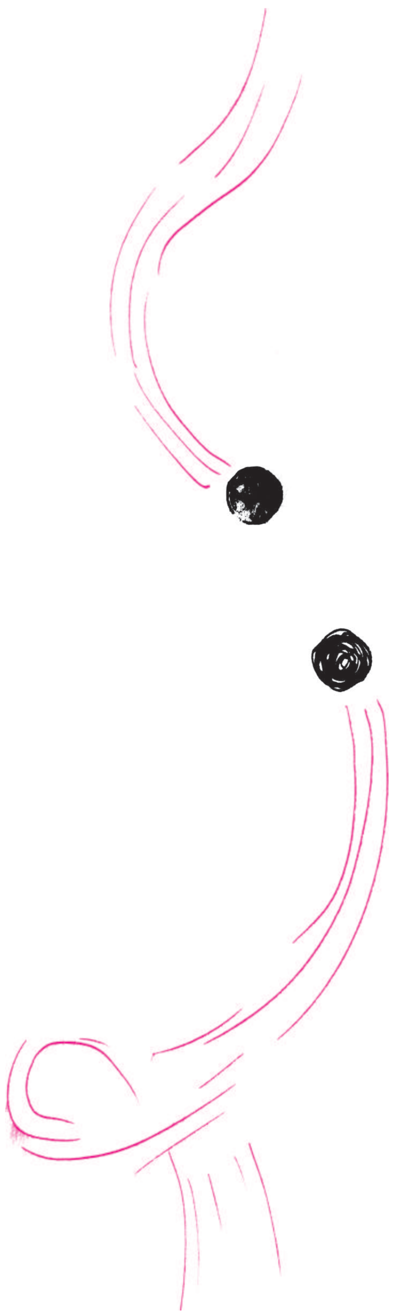
Uwzględniając, że

$$E_a = \sqrt{(m_ac^2)^2 + (p_ac)^2}, \qquad E_b = \sqrt{(m_bc^2)^2 + (p_bc)^2},$$

podnosząc ostatnią nierówność stronami do kwadratu, skracając obustronnie przez c^2 i upraszczając, dostajemy

(3) $$(m_ac)(m_bc) + p_ap_b \leqslant \sqrt{(m_ac)^2 + p_a^2}\sqrt{(m_bc)^2 + p_b^2}.$$

Analizując proste zjawisko fizyczne, jakim było zderzenie dwóch cząstek, odtworzyliśmy tym samym nierówność Schwarza dla (dowolnych!) liczb nieujemnych $x_1 = m_ac$, $x_2 = p_a$, $y_1 = m_bc$, $y_2 = p_b$ (nieujemność liczb w nierówności Schwarza $(*)$ oczywiście nie uszczupla jej ogólności).



Spróbujmy jeszcze spojrzeć na końcowy wynik (3) nieco ogólniej. W szczególnej teorii względności bardzo wygodnym pojęciem jest tzw. *czterowektor energii-pędu*. Formalnie, dla poruszającej się cząstki o masie m z pędem $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ i całkowitej energii E, jej czterowektor energii-pędu definiujemy jako uporządkowaną czwórkę $(E/c, p_x, p_y, p_z)$ i w skrócie piszemy $(E/c, \mathbf{p})$. Jest to pojęcie analogiczne do pojęcia *czterowektora położenia* cząstki $(ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r})$. Takie czterowektory można mnożyć skalarnie. Żeby jednak iloczyn skalarny miał sensowne własności, nie powinien zmieniać się przy przekształceniach niezmieniających fizycznego sensu teorii, tzw. przekształceniach symetrii. W naszym przypadku przekształceniem symetrii jest transformacja Lorentza, a niezmienniczy iloczyn skalarny definiuje się następująco:

$$(E_a/c, \mathbf{p}_a) \cdot (E_b/c, \mathbf{p}_b) := (E_a/c)(E_b/c) - \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b,$$

gdzie $\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b = p_{a,x}p_{b,x} + p_{a,y}p_{b,y} + p_{a,z}p_{b,z}$ oznacza już *zwykły* iloczyn skalarny w przestrzeni trójwymiarowej. Zauważmy, że wówczas długość czterowektora to po prostu

$$|(E/c, \mathbf{p})| = \sqrt{(E/c, \mathbf{p}) \cdot (E/c, \mathbf{p})} = \sqrt{(E/c)^2 - p^2} =$$
$$= \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - (pc)^2} = mc.$$

Zobaczmy, że (3) jest równoważna nierówności

$$(m_ac)(m_bc) \leqslant (E_a/c)(E_b/c) - p_ap_b,$$

a w języku czterowektorów i ich iloczynów skalarnych – nierówności

(4) $$|(E_a/c, \mathbf{p}_a)||(E_b/c, \mathbf{p}_b)| \leqslant (E_a/c, \mathbf{p}_a) \cdot (E_b/c, \mathbf{p}_b).$$

Ciekawe, że (4) jest równoważna ogólnej klasycznej nierówności Schwarza (S) dla $n = 4$.

Zatem uzyskany główny wynik (3) jest niczym innym jak nierównością Schwarza dla czterowektorów energii-pędu cząstek a i b! Tyle że zwrot tej nierówności jest w przeciwną stronę w stosunku do klasycznej nierówności Schwarza, co wynika ze szczególnej postaci iloczynu skalarnego. Stwierdzenie, że zachodzi (3), można więc wyprowadzić bez żadnych, czynionych przez nas pracowicie, rozważań kinematycznych dla cząstek a, b, c, po prostu powołując się na (4). Nierówność Schwarza (4) jest z kolei, jak widzieliśmy, naturalną konsekwencją tego, że iloczyn skalarny czterowektorów ma dobry sens fizyczny.

Dla autora przedstawione powyżej odkrycie nierówności w prawach fizyki było wstrząsającym i jednocześnie bardzo radosnym przeżyciem. Może Czytelnik zna fizyczny dowód jakiejś innej klasycznej nierówności?