Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2010

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 597, 598

Redaguje Marcin E. KUCZMA

597. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniające równanie

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y \qquad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

598. Niech $M = \{1, 2, \ldots, m^2\}$ (m jest ustaloną liczbą naturalną).

(a) Ile jest w zbiorze M podzbiorów niezawierających pary liczb, których różnica dzieli się przez m?

(b) Ile jest w zbiorze M podzbiorów niezawierających pary liczb, których różnica jest równa m?

Zadanie 598 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2009

Przypominamy treść zadań:

589. W każde pole tabelki o wymiarach $n \times n$ wpisujemy dodatnią liczbę całkowitą niewiększą od n tak, by w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie wszystkie liczby były równe lub wszystkie liczby były różne. Niech S będzie sumą wszystkich liczb w tabelce. Ile różnych wartości S można w ten sposób uzyskać (dla ustalonego n)?

590. Dowieść, że dla każdej parzystej liczby naturalnej n oraz dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^n \leqslant \frac{1 + x + \ldots + x^n}{n+1}.$$

589. Jeśli w każdym wierszu jest permutacja liczb $1, \ldots, n$, to $S = n \cdot n(n+1)/2$. Gdy w dokładnie jednym wierszu jest ciąg stały $(k, \ldots, k)$, a w każdym z pozostałych wierszy jest permutacja liczb $1, \ldots, n$, wówczas $S = nk + (n-1) \cdot n(n+1)/2$.

Gdy w dwóch wierszach są ciągi stałe $(k, \ldots, k)$, $(l, \ldots, l)$, przy czym $k \neq l$, to w każdej kolumnie musi być permutacja liczb $1, \ldots, n$, i znów $S = n \cdot n(n+1)/2$. Jeśli zaś $k = l$, to w każdej kolumnie musi być ciąg stały $(k, \ldots, k)$, więc $S = n^2 k$.

Reasumując, możliwymi wartościami sumy S są liczby

$$\frac{n^2(n+1)}{2}, \quad nk + \frac{n(n^2-1)}{2}, \quad n^2 k; \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

(i wszystkie one faktycznie mogą być osiągnięte) – razem, a priori, $2n+1$ wartości. Czy jednak są one różne? Możliwe, że (dla pewnych $k, l \leqslant n$) ma miejsce któraś z równości

$$\frac{n^2(n+1)}{2} = nk + \frac{n(n^2-1)}{2}, \tag{1}$$

$$\frac{n^2(n+1)}{2} = n^2 k, \tag{2}$$

$$nk + \frac{n(n^2-1)}{2} = n^2 l. \tag{3}$$

Każde z równań (1) i (2) sprowadza się do $2k = n+1$; nie ma więc rozwiązania, gdy n jest liczbą parzystą, ma natomiast dokładnie jedno rozwiązanie $k = (n+1)/2$, gdy n jest liczbą nieparzystą. Równanie (3) przekształcamy do postaci

$$2k - 1 = n(2l - n).$$

I znów: dla n parzystego – brak rozwiązań. Dla n nieparzystego: lewa strona przedstawia liczbę mniejszą niż $2n$, prawa – wielokrotność n. Równość zachodzi jedynie, gdy obie strony są równe n, czyli dla $k = (n+1)/2 = l$.

Wniosek: gdy n jest liczbą parzystą, wszystkie wyznaczone na początku wartości są różne; suma S może mieć każdą z tych $2n+1$ wartości. Gdy n jest liczbą nieparzystą, wartość $n^2(n+1)/2$ powtarza się trzykrotnie; jest więc $2n-1$ możliwych wartości sumy S.

590. Zadana nierówność zachodzi dla $x = 1$. Dla $x \neq 1$ przepisujemy ją równoważnie jako

$$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \geqslant (n+1)\left(\frac{x+1}{2}\right)^n, \tag{4}$$

i w tej postaci będziemy jej dowodzić.

Dla każdej pary liczb rzeczywistych a, b ma miejsce równość

$$(a+b)^{n+1} - (a-b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(a^{n+1-k} b^k - a^{n+1-k}(-b)^k\right) = 2 \sum_{k \in K} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k,$$

gdzie $K = \{1, 3, 5, \ldots, n-1, n+1\}$. Kontynuujemy przekształcenia dla $b \neq 0$:

$$\frac{(a+b)^{n+1} - (a-b)^{n+1}}{2b} = \sum_{k \in K} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^{k-1} \geqslant \geqslant (n+1)a^n; \tag{5}$$

ostatnia nierówność powstała przez odrzucenie z uzyskanej sumy wszystkich składników z wyjątkiem pierwszego – są one liczbami nieujemnymi, bo wykładniki potęg są parzyste.

Podstawiamy teraz w (5) $a = (x+1)/2$, $b = (x-1)/2$ i dostajemy dowodzoną nierówność (4).

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2010

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 482 ($WT = 3{,}04$) i 483 ($WT = 2{,}38$) z numeru 9/2009

Krzysztof Magiera	Łosiów	36,89
Michał Koźlik	Gliwice	28,86
Jerzy Witkowski	Radlin	18,88

Zadania z fizyki nr 494, 495

Redaguje Jerzy B. BROJAN

494. Elektrony w metalu można – jak wiadomo – uważać za cząstki swobodne. Załóżmy, że w kawałku metalu poruszającym się z przyspieszeniem elektrony osiągają to samo przyspieszenie wskutek działania pola elektrycznego wytworzonego przez odpowiednie ładunki powierzchniowe. Obliczyć moc promieniowania kwadratowej płytki metalowej o boku $l = 5$ cm i grubości $d = 0{,}5$ cm, drgającej z amplitudą $A = 1$ cm i częstotliwością $f = 1$ kHz wzdłuż osi prostopadłej do płytki.

Wskazówka: Zgodnie z prawami elektrodynamiki w tzw. przybliżeniu dipolowym moc promieniowania dipola elektrycznego o momencie p jest równa

$$P = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t^2}\right)^2.$$

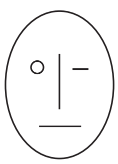
Momentem dipolowym układu dwóch ładunków $+q$ i $-q$ odległych o d nazywamy iloczyn qd.

495. Dwie półproste tworzą kąt 2α, którego dwusieczna jest pionowa. Wzdłuż tych półprostych mogą ślizgać się bez tarcia końce jednorodnego pręta o długości l. W którym przypadku poziome położenie pręta jest położeniem równowagi trwałej – gdy wierzchołek kąta jest na górze, czy gdy jest na dole? Dla przypadku równowagi trwałej podać wzór na częstotliwość małych drgań pręta wokół tego położenia.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2009

Przypominamy treść zadań:

486. Gdy spojrzeć w lustro, zamknąć prawe oko i naszkicować, jak widzimy swoją twarz, powstanie obraz schematycznie przedstawiony na rysunku 1.

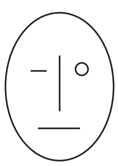


Rys. 1

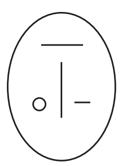
1. Zestawić dwa prostokątne lusterka pod kątem prostym, zamknąć prawe oko i naszkicować obraz twarzy powstający przy dwukrotnym odbiciu światła w lusterkach. Obracać przed sobą zestaw wokół osi pokrywającej się z kierunkiem widzenia i notować zmiany obrazu.
2. Zestawić trzy prostokątne lusterka tak, żeby tworzyły narożnik sześcianu, zamknąć prawe oko i naszkicować obraz twarzy powstający przy trzykrotnym odbiciu światła. Obracać przed sobą zestaw i notować zmiany obrazu.

487. Na końcach nieważkiego pręta o długości $l = 1$ m znajdują się dwie jednakowe masy punktowe m. Pręt jest podtrzymywany w środku, wokół którego może się swobodnie obracać, i znajduje się w polu grawitacyjnym Ziemi, które uznajemy za takie, jakby cała masa Ziemi była skupiona w jej środku. Obliczyć okres małych drgań pręta wokół pionowego położenia równowagi.

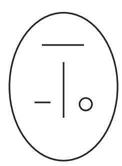
Jaka będzie odpowiedź, jeśli pręt jest jednorodny, a pozostałe dane – niezmienione?



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

486. Obraz widziany w dwóch lusterkach, których krawędź zetknięcia jest pionowa (równoległa do osi twarzy), podano na rysunku 2. Przy obrocie lusterek obraz obraca się dwukrotnie szybciej, np. przy poziomej krawędzi zetknięcia otrzymujemy rysunek 3. Obraz widziany w trzech lusterkach jest podany na rysunku 4 i nie zmienia się przy obrocie zestawu.

487. Wprowadźmy kąt przechyłu pręta jako δ, a połowę długości pręta oznaczmy dla wygody jako l'. W pierwszym rzędzie względem δ oraz względem stosunku l'/R odległości końców pręta od środka Ziemi wynoszą $R - l'$ oraz $R + l'$ (gdzie R jest promieniem Ziemi), a siły działające na końce są równe

$$F_1 = \frac{GMm}{(R-l')^2} \approx mg\left(1 + \frac{2l'}{R}\right),$$

$$F_2 = \frac{GMm}{(R+l')^2} \approx mg\left(1 - \frac{2l'}{R}\right),$$

gdzie M – masa Ziemi, g – przyspieszenie ziemskie. W tym samym przybliżeniu nietrudno również wyznaczyć kąty między kierunkami tych sił a osią pręta. Są one równe $\delta(1 + l'/R)$ i $\delta(1 - l'/R)$, a stąd momenty sił F_1 i F_2 wynoszą

$$M_1 \approx mgl'\delta\left(1 + \frac{3l'}{R}\right), \qquad M_2 \approx mgl'\delta\left(1 - \frac{3l'}{R}\right).$$

Wypadkowy moment siły jest równy

$$M_{\mathrm{w}} \approx \frac{6mgl'^2}{R}\delta$$

i widać, że jego zwrot sprzyja powrotowi do położenia pionowego, zatem wystąpią drgania. Kwadrat częstości drgań ω jest równy ilorazowi współczynnika stojącego przed δ w powyższym wzorze przez moment bezwładności $I = 2ml'^2$:

$$\omega^2 = \frac{3g}{R}.$$

Zauważmy, że otrzymany wynik nie zależy ani od masy pręta, ani od jego długości, a zatem obowiązuje on dla „wiązki” składającej się z dowolnej liczby takich prętów – czyli dla pręta o dowolnym symetrycznym rozkładzie masy (w szczególności jednorodnego). Wartością liczbową okresu jest

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{3g}} = 2920 \text{ s} = 48 \text{ min } 40 \text{ s}.$$