

Kącik przestrzenny (2) Najmocniejsze twierdzenie stereometrii

Rozpocznijmy od sformułowania tytułowego twierdzenia (łatwy dowód pozostawiamy Czytelnikowi).

Twierdzenie 1. Dana jest sfera o oraz takie punkty A i B , że prosta AB jest rozłączna ze sferą o . Prowadzimy dwie płaszczyzny przechodzące przez punkty A i B styczne do sfery o w punktach P i Q (rys. 1). Wówczas

- $AP = AQ$,
- trójkąty APB i AQB są przystające.

Z części a) otrzymujemy, że jeśli do dwóch danych sfer poprowadzimy dwie wspólne styczne zewnętrzne, to odcinki łączące punkty styczności zawarte w tych stycznych będą równej długości (dlaczego?).

Okazuje się, że te proste fakty mogą prowadzić do bardzo ciekawych i niebanalnych wniosków. Przyjrzyjmy się kilku przykładom.

1. (IMO LONGLIST '85) Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian ABC i BCD odpowiednio w punktach P i Q . Dowieść, że $\sphericalangle APB = \sphericalangle CQD$.

Rozwiązanie. Niech R i S będą punktami styczności sfery wpisanej odpowiednio ze ścianami ACD i ABD . Trójkąty utworzone przez pewną krawędź i punkty styczności sfery wpisanej z dwoma ścianami zawierającymi tę krawędź są przystające. Wygodnie jest teraz wszystko rysować na siatce (rys. 2). Oznaczmy:

$$\begin{aligned} \sphericalangle APB = \sphericalangle ASB = \alpha, & \quad \sphericalangle BPC = \sphericalangle BQC = \beta, & \quad \sphericalangle APC = \sphericalangle ARC = \gamma, \\ \sphericalangle CQD = \sphericalangle CRD = \alpha', & \quad \sphericalangle ARD = \sphericalangle ASD = \beta', & \quad \sphericalangle BQD = \sphericalangle BSD = \gamma'. \end{aligned}$$

Otrzymujemy

$$\beta + \gamma' + \alpha' = 360^\circ, \quad \gamma + \alpha' + \beta' = 360^\circ, \quad \alpha + \beta' + \gamma' = 360^\circ, \quad \alpha + \beta + \gamma = 360^\circ.$$

Dodając stronami pierwsze trzy równości i uwzględniając czwartą, dostajemy

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ.$$

Stąd i z trzeciej równości dostajemy $\alpha = \alpha'$. Zatem $\sphericalangle APB = \sphericalangle CQD$.

Warto zapamiętać ten fakt, bo na pierwszy rzut oka jest dość zaskakujący (i, niestety, mało znany), a przydaje się w wielu miejscach. Czytelnikom pozostawiamy dowód, że analogiczna własność zachodzi również dla sfery dopisanej, jak i w przypadkach, gdy jeden lub dwa wierzchołki uciekną do nieskończoności.

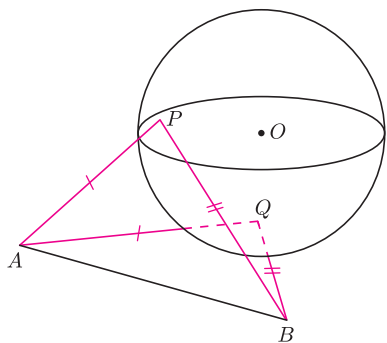
2. (OM 54-III-5) Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie H , a sfera dopisana do tego czworościanu jest styczna do ściany ABC w punkcie O . Dowieść, że jeżeli O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , to H jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.

Sięgając do broszurki z tej olimpiady, widzimy, że zadanie to rozwiązały zaledwie 3 osoby, jedna w połowie, a aż 122 prace zostały ocenione na 0 punktów! Jednakże zadanie to, jak za chwilę zobaczymy, jest bardzo łatwe – wystarczy zauważyć kilka par trójkątów przystających i porachować troszkę na kątach.

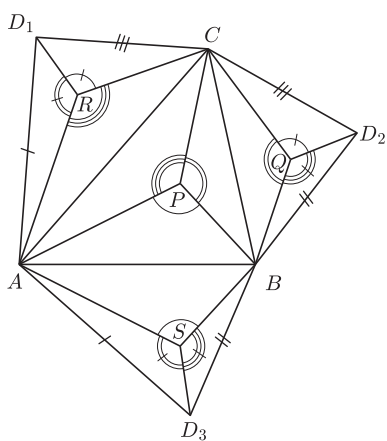
Rozwiązanie. Niech K i L będą punktami styczności sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ odpowiednio ze ścianami ACD i BCD , a P i Q punktami styczności sfery dopisanej odpowiednio z płaszczyznami ACD i BCD . Wówczas trójkąty KCP i LCQ są przystające (rys. 3). Oznaczmy miary kątów trójkąta ABC przy wierzchołkach A, B, C odpowiednio przez α, β, γ . Trójkąty BQC i BOC są przystające, skąd wynika, że $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle BCO = 90^\circ - \alpha$ (rys. 4). Analogicznie $\sphericalangle ACP = 90^\circ - \beta$. Niech $\sphericalangle BCL = \varphi$. Wtedy $\sphericalangle ACK = \varphi + \beta - \alpha$ (bo $\sphericalangle PCK = \sphericalangle QCL$). Jednakże $\triangle BCH \equiv \triangle BCL$ i $\triangle ACH \equiv \triangle ACK$, więc

$$\gamma = \sphericalangle ACB = \sphericalangle BCH} + \sphericalangle ACH} = \sphericalangle BCL} + \sphericalangle ACK} = 2\varphi + \beta - \alpha$$

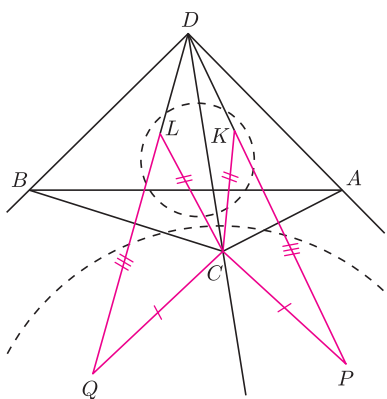
(rys. 5), skąd $\varphi = 90^\circ - \beta$. Zatem $CH \perp AB$. Analogicznie dowodzimy, że $BH \perp AC$, a to oznacza, że H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC .



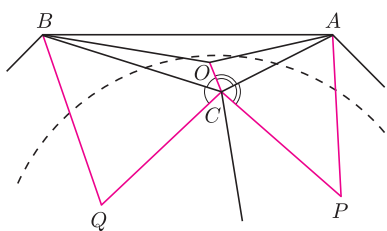
Rys. 1



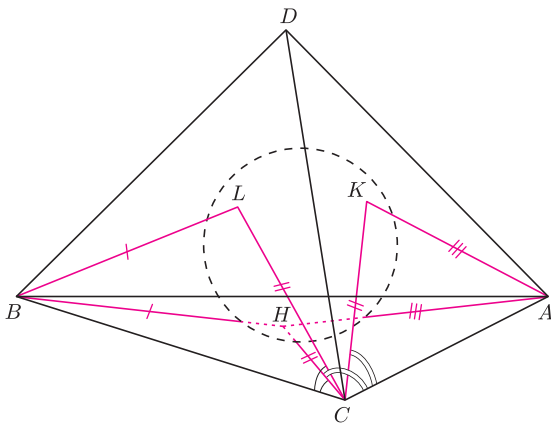
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Dlaczego więc tak proste zadanie sieje takie spustoszenie na finale? Częstym błędem wielu olimpijczyków jest rysowanie wszystkich rzeczy na jednym rysunku. Na powyższym przykładzie przekonaliśmy się, jak dużo może dać zrobienie kilku rysunków i zaznaczenie na każdym z nich jedynie pewnych elementów! Być może brakuje też wiary, że do tego typu zadań wystarczają jedynie te prościutkie fakty przytoczone na początku. Pamiętajcie: wiara czyni cuda!

Zadania

3. (RUS 1986) Czworoscian $ABXY$ jest opisany na sferze. Punkty A i B są ustalone, a punkty X i Y poruszają się. Udowodnić, że suma

$$\sphericalangle AXB + \sphericalangle XBY + \sphericalangle BYA + \sphericalangle YAX$$

jest stała.

4. (OM 57-III-5) Dany jest czworoscian $ABCD$, w którym $AB = CD$. Sfera wpisana w ten czworoscian jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L . Dowieść, że jeżeli punkty K i L są środkami ciężkości ścian ABC i ABD , to czworoscian $ABCD$ jest foremny.

Więcej zadań i objaśnienie skrótów na internetowej stronie *Delty*.

Michał KIEZA

Rozwiązania zadań lingwistycznych

Zadanie nr 1. Oto wyrazy, z których tworzy się liczebniki w języku *sulka*:

- *tgiang* 1, *lomin* 2, *korlotge* 3, *korlolo* 4, *ktiëk* 5, *mhelom* 20;
- *hori orom* – oznacza dodawanie, *lo* – podwojenie;
- *a* – l. pojedyncza lub podwójna, *o* – l. mnoga (od 3).

Rzeczowniki mają te same formy w liczbie pojedynczej i podwójnej, natomiast inne w liczbie mnogiej (*tu*, *sngu*; *vhoi*, *vuo*). Istnieją osobne wyrazy dla czwórki kokosów oraz dla pary i czwórki owoców chlebowca (*ngausmia*, *moulang*, *ngaitegaap*).

Odpowiedzi:

- (a) *a ksie a tgiang*: 1 kokos
o ngaitegaap a korlotge: 12 owoców chlebowca
o ngausmia a ktiëk: 20 kokosów
o vuo a lo ktiëk hori orom a tgiang: 11 orzechów betelu
- (b) 2 pochrzyny: *a lo tu a lomin*
 14 pochrzynów: *o sngu a lo ktiëk hori orom a korlolo*
 15 owoców chlebowca: *o ngaitegaap a korlotge hori orom a moulang hori orom a tgiang*
 20 orzechów betelu: *o vuo a mhelom*

Zadanie nr 5. Zdania w *nahuatl* zaczynają się od orzeczenia. Podmiot i dopełnienie (dopełnienia) niebędące zaimkami występują za nim w dowolnej kolejności, poprzedzone wyrazem *in* (rodzajnik określony). Czasownik otrzymuje kolejno następujące przedrostki:

- podmiot: *ni-* 1. os. l.p., *ti-* 2. os. l.p., — 3. os. l.p.;
- dopełnienie: *nëch-* 1. os. l.p., *mitz-* 2. os. l.p., *k-* 3. os. l.p.;
- kolejne dopełnienie: *të-* ‘kogoś, komuś’, *tla-* ‘coś’,

przy czym w zdaniach złożonych postaci „*A* powoduje, że *B* robi *C*.”, *B* traktowane jest jako dopełnienie (por. ang. konstrukcje jak „He makes them do ...”), oraz następujące przyrostki:

- ‘powodować, że ...’:
 - przy czasowniku nieprzechodnim (niedopuszczającym dopełnienia): *-tia* (z wydłużeniem poprzedzającego *i*),
 - przy czasowniku przechodnim: *-ltia*;
- ‘robić dla’: *-lia* (ze zmianą poprzedzającego *a* w *i*).

Ta sama czynność z dopełnieniem i bez często jest wyrażana za pomocą różnych czasowników.

Odpowiedzi:

- (a) 18. *tiktlazohtlaltia in zihuätl in kuauxhënk*:
 powodujesz, że kobieta kocha cieśnię;
 powodujesz, że cieśnię kocha kobietę
19. *nëchtzähtzitia*: on powoduje, że krzyczą
20. *tikhuitek*: bijesz go
21. *nikëhuilia in kikatl in tizitl*:
 śpiewam pieśń dla znachora
22. *nikneki in ätölli*: chcę atole
23. *mitztlakähualtia*: on powoduje, że coś zostawiasz
- (b) 24. on powoduje, że robię atole:
nëchchihualtia in ätölli
25. robisz wino dla kogoś: *tiktëchihuilia in oktli*
26. znachor powoduje, że śpisz: *mitzkochitia in tizitl*
27. śpiewam coś: *nitlaëhua*
28. przewracam się: *nihuetzi*