$2^{21464505}$, czyli jeszcze raz o potęgach dwójki

Paweł STRZELECKI[*]

O potęgach dwójki i własnościach ich rozwinięć dziesiętnych można było w *Delcie* poczytać wielokrotnie, m.in. w artykułach Zbigniewa Marciniaka i wyżej podpisanego. Istnieją zapewne osoby, które nie czytały tych artykułów, dlatego że kilkanaście lat temu nie umiały jeszcze czytać, choć dziś *Deltę* czytują. Być może jest to dostatecznym usprawiedliwieniem, żeby napisać o całej sprawie jeszcze raz.

Mam także drugie usprawiedliwienie. $2^{21464505}$ ma w zapisie dziesiątkowym blisko sześć i pół miliona cyfr; początkowe z nich to 7, 0, 3, 2, 0, 1 i 0. Ponieważ zaś 7 marca 2010 roku Marek Kordos obchodzi siedemdziesiąte urodziny, więc mogę mu tę potęgę dwójki ofiarować w prezencie, dorzucając do pary $2^{25224715}$ – ta z kolei zaczyna się od cyfr 7031940, czyli daty urodzin Redaktora.

Czytelnik, jeśli zechce, potraktuje powyższe dwa zdania jako dowód ostatecznego zdziwaczenia matematyków. Jednak przy okazji przyjdą mu może do głowy pytania: co to za zbieg okoliczności? Dlaczego na początku rozwinięć dziesiętnych potęg dwójki pojawia się data okrągłych urodzin Redaktora? Czy podobny prezent można byłoby zrobić komukolwiek innemu? A może to objaw paranoi? Może autor tekstu, z braku lepszych rozrywek i pomysłów, postanowił zająć się numerologią?

NA OKŁADCE prezentujemy wizualizację dwóch przypadków zderzeń proton-proton w LHC, uchwyconych przez eksperyment ATLAS. Podobne przypadki zostały zarejestrowane przez pozostałe główne eksperymenty LHC: CMS, LHCb i ALICE. Pokazane przypadki zawierają, między innymi, miony, które, jako jedyne cząstki naładowane, są w stanie opuścić detektor, zostawiając ślady we wszystkich poddetektorach. Wyświetlone są tylko te elementy, w których jakiekolwiek sygnały zostały zarejestrowane (na dolnym rysunku pokazano również zarys struktury magnesów toroidalnych). Czerwone linie to interpolacja śladów mionów na podstawie odczytów elektronicznych.

Paranoję i numerologię chętnie zostawiam innym. To, że wśród początkowych fragmentów zapisu dziesiętnego liczb 2^n można znaleźć np. 7031940, nie jest wcale szczęśliwym trafem; data urodzin każdego z nas (z numerami PESEL i NIP dorzuconymi na dodatek) znajduje się na początku zapisu dziesiętnego nieskończenie wielu potęg dwójki. To samo można powiedzieć nie tylko o datach. Istnieją np. wykładniki n, dla których zapis dziesiętny 2^n zaczyna się od ciągu utworzonego z wypisanych po kolei wszystkich numerów z książki adresowej mojego telefonu komórkowego. Pisząc te słowa, nie potrafię wprawdzie podać żadnej takiej liczby n, ale mimo to mam uczucie niezachwianej pewności, które nie zawsze towarzyszy mi w życiu. Takie uczucie pewności daje matematykowi dowód – w tym przypadku dowód twierdzenia, które orzeka, że *każdy skończony ciąg cyfr pojawia się na początku rozwinięcia dziesiętnego nieskończenie wielu potęg dwójki.* (Jedną z pociech, których dostarcza obcowanie z matematyką, jest to, że dzięki dowodom można być pewnym różnych rzeczy nieoczywistych.)

Nawet dla ciągów jednocyfrowych teza owego twierdzenia nie jest oczywista. Gdy zaczniemy wypisywać początkowe cyfry liczb 2^n dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, to ujrzymy następujący wzór:

$$\begin{array}{cccccccccc}
1, & 2, & 4, & 8, & 1, & 3, & 6, & 1, & 2, & 5, \\
1, & 2, & 4, & 8, & 1, & 3, & 6, & 1, & 2, & 5, \\
1, & 2, & 4, & 8, & 1, & 3, & 6, & 1, & 2, & 5, \\
1, & 2, & 4, & 8, & 1, & 3, & 6, & 1, & 2, & \ldots
\end{array}$$

Siódemek i dziewiątek jakoś ani śladu, prawda? Co więcej, komuś niecierpliwemu i nieuważnemu może przyjść do głowy myśl, że ciąg początkowych cyfr potęg dwójki jest okresowy i wszystko w nim powtarza się regularnie, co 10 miejsc.

To jednak tylko złudzenie, którego przyczyną jest to, że $2^{10} = 1024$ jest niezłym przybliżeniem liczby 1000. Mnożenie liczby przez 1000 polega przecież na dopisywaniu trzech zer na końcu jej zapisu dziesiętnego i nie ma najmniejszego wpływu na początkowy fragment tego zapisu. Gdy wielokrotnie mnożymy przez 1024, drobne i początkowo niezbyt istotne dodatki z końcowych fragmentów zapisu dziesiętnego zaczynają kumulować się i wzbierać, rozlewając się stopniowo coraz dalej w lewo. Gdybym wypisał wyżej piąty wiersz początkowych cyfr potęg dwójki, to zamiast szóstki byłaby w nim siódemka.

[*]Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

Aby wykazać, że siódemka jest początkową cyfrą nieskończenie wielu potęg dwójki, trzeba wyjść poza krąg najprostszych eksperymentów i *zrozumieć*, co to znaczy, że zapis dziesiętny liczby 2^n zaczyna się od siódemki. Otóż, jest tak wtedy, gdy 2^n znajduje się między dwiema liczbami: pierwszą z nich jest siódemka z pewną ilością zer, a drugą – ósemka z taką samą liczbą zer. Wszystkie liczby między tymi dwiema zaczynają się od siódemki. I na odwrót, każdą liczbę, która ma za pierwszą cyfrę siódemkę, można wstawić w jeden z przedziałów o końcach $70\ldots0$ i $80\ldots0$ (zer jest w obu liczbach tyle samo).

Teraz, żeby było poręczniej, użyjmy symboli: 7 jest pierwszą cyfrą liczby 2^n wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego naturalnego k mamy

$$7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k.$$

Aby dostać prostszy, równoważny zapis, logarytmujemy te nierówności stronami (przy podstawie 10); daje to najpierw $k + \log 7 < n \log 2 < k + \log 8$, a ostatecznie

$$\log 7 < n \log 2 - [n \log 2] < \log 8.$$

Możemy tak napisać, gdyż $0 < \log 7 < \log 8 < 1$ i dlatego k (liczba cyfr 2^n zmniejszona o 1) jest częścią całkowitą liczby $n \log 2$.

Poszukiwanie potęg dwójki z pierwszą cyfrą 7 jest więc tym samym, co obserwowanie kolejnych wyrazów ciągu $a_n := nx - [nx]$, gdzie $x = \log 2$, a $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Gdyby np. wziąć $x = 41/137$, ciąg a_n części ułamkowych kolejnych wielokrotności x byłby okresowy: wyrazy o numerach różniących się o 137 byłyby równe. Podobnie byłoby dla każdej liczby wymiernej x. Jednak $\log 2$ nie jest liczbą wymierną: gdyby $\log 2$ był równy p/q, to wprost z definicji logarytmu mielibyśmy $10^{p/q} = 2$, czyli $10^p = 2^q$, co jest niemożliwe (lewa strona dzieli się przez 5, a prawa nie). Kluczową dla nas konsekwencją niewymierności $x = \log 2$ jest to, że wszystkie wyrazy ciągu a_n są różne. Gdyby bowiem było $a_n = a_m$ dla jakichś numerów $n \neq m$, to przekształcając równość $nx - [nx] = mx - [mx]$, zapisalibyśmy x jako ułamek o liczniku i mianowniku całkowitym,

$$x = \frac{[nx] - [mx]}{n - m},$$

a wiemy już, że $x = \log 2$ takim ułamkiem nie jest.

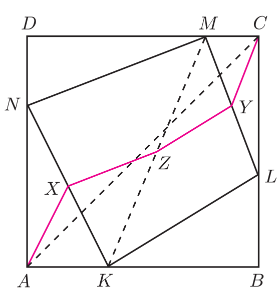
Te dwa spostrzeżenia pozwalają zrozumieć wszystko do końca. Podzielmy najpierw odcinek $[0, 1]$ na m równych przedziałów, wybierając m tak, żeby długość każdej części była mniejsza niż $\log 8 - \log 7$ (wystarczy w tym celu wziąć $m = 18$). Zgodnie z zasadą szufladkową Dirichleta któreś dwie spośród $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ – powiedzmy a_s i a_{s+k} – należą do tego samego przedziału długości $1/m$. Jak otrzymać a_{s+k}, gdy znamy a_s? Nietrudno to wymyślić: a_n jest częścią ułamkową nx, więc jeśli staniemy na osi liczbowej w punkcie a_s, zrobimy k kroków długości x w prawo i zmierzymy odległość od ostatniej miniętej liczby całkowitej, to otrzymamy część ułamkową liczby $a_s + kx$, która jest równa części ułamkowej liczby $a_s + [sx] + kx = (k + s)x$, tzn. równa a_{s+k}. A to znaczy, że

$$kx = (k + s)x - [sx] - a_s = [(k + s)x] - [sx] + a_{s+k} - a_s$$

jest sumą liczby całkowitej $l = [(k + s)x] - [sx]$ i ułamka $u = a_{s+k} - a_s$. Może zachodzi $u > 0$, a może $u < 0$. Tego nie wiemy i na szczęście jest to nieistotne. Na pewno jednak moduł u nie przekracza $1/m$, bo a_s i a_{s+k} wybraliśmy z tego samego krótkiego przedziału.

Dla wygody wyobraźmy sobie teraz, że oś liczbowa została nawinięta na okrąg długości 1, jak nierozciągliwa nić na szpulkę. W wyniku tej operacji sklejone zostały końce odcinka $[0, 1]$, a także wszystkie liczby całkowite. Przesunięciu o x na nitce-osi-liczbowej odpowiada obrót szpulki-okręgu o kąt równy kątowi środkowemu opartemu na łuku długości x, czyli mówiąc po szkolnemu i nie bawiąc się w radiany, o kąt $360x$ stopni. Przesunięciu o kx, czyli k-krotnemu przesunięciu o x, odpowiada kolejne wykonanie k takich obrotów, czyli obrót o $360kx$ stopni. Wiemy już, że jest $kx = l + u$, tzn. $360kx = 360l + 360u$,

Rozwiązanie zadania M 1271.
Oznaczmy przez X, Y, Z odpowiednio środki odcinków KN, LM, KM.



Ponieważ trójkąty AKN oraz CLM są prostokątne, więc

$$AX = \frac{1}{2}KN \quad \text{oraz} \quad CY = \frac{1}{2}ML.$$

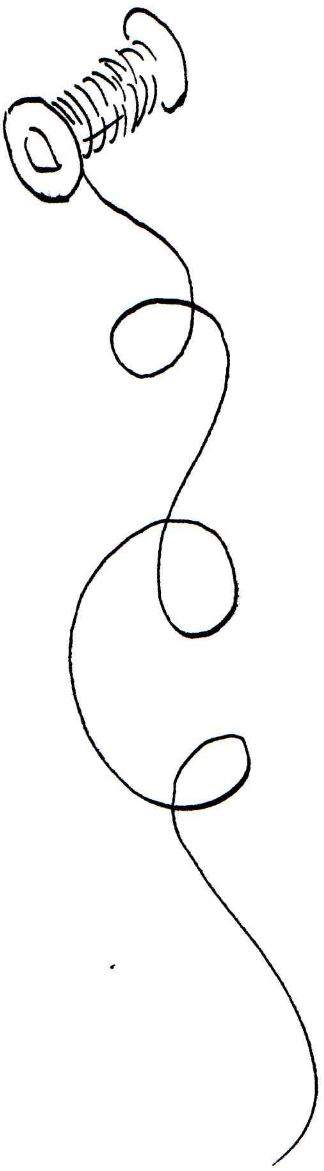
Ponadto, korzystając z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa, otrzymujemy

$$XZ = \frac{1}{2}MN \quad \text{oraz} \quad ZY = \frac{1}{2}KL.$$

Wobec tego $KL + LM + MN + NK = 2(AX + XZ + ZY + YC) \geqslant 2AC = 2\sqrt{2}$. Wybierając punkty K, L, M, N jako środki odcinków AB, BC, CD, DA, otrzymujemy kwadrat $KLMN$ o obwodzie $2\sqrt{2}$.

Zatem najmniejszą możliwą wartością, jaką może przyjąć obwód czworokąta $KLMN$, jest $2\sqrt{2}$.

a obrót o $360l$ stopni dla całkowitego l nic przecież nie zmienia. Na naszej zwiniętej osi liczbowej przejście od a_s do a_{s+k}, a także od jakiegokolwiek a_j do a_{j+k}, polega więc na obrocie o kąt $360u$ stopni. Może w lewo, a może w prawo; tego nie wiemy. Dowcip polega jednak na tym, że liczba u ma niewielki moduł i dlatego k wyjściowych obrotów daje obrót o niewielki kąt. Zauważmy: dobierając wcześniej odpowiednio dużą liczbę m, moglibyśmy sprawić, że byłby to obrót o kąt mniejszy od dowolnie ustalonego.



Na szpulce-zwiniętej-osi jest łuczek-przedział $(\log 7, \log 8)$. Dla dowolnego j liczby a_j, a_{j+k}, a_{j+2k} itd. przedzielone są łukami okręgu długości $|u| \leqslant 1/m$. Ponadto, wszystkie te liczby są różne; stwierdziliśmy to już dawno. Moglibyśmy je zaznaczyć ołówkiem, stawiając na okręgu kropki w regularnych odstępach, tak, jak podziałki na zegarku – tzn. prawie tak, bo wszak zatoczywszy ołówkiem koło, nie trafilibyśmy ponownie w to samo miejsce. Przedział $(\log 7, \log 8)$ jest dłuższy niż odstęp między sąsiednimi kropkami. Zatem któraś kropka weń wpadnie. Jeśli będziemy zaznaczać kropki bez końca, to za każdym pełnym obiegiem co najmniej jedna z nich znajdzie się na łuku między $\log 7$ a $\log 8$. Zatem do przedziału $(\log 7, \log 8)$ należy nieskończenie wiele wyrazów ciągu a_n. Nieskończenie wiele potęg dwójki zaczyna się od siódemki.

Identyczne rozumowanie można przeprowadzić dla dowolnego przedziału (α, β), gdzie $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$. Wystarczy tak dobrać liczbę m, żeby „chodzić w kółko odpowiednio drobnymi kroczkami". Nietrudno stąd wywnioskować, że każdy skończony ciąg cyfr pojawia się na początku zapisu dziesiętnego nieskończenie wielu potęg dwójki. Kto zechce, dopracuje szczegóły.

Czytelnik spostrzegł zapewne, że im przedział (α, β) krótszy, tym więcej potrzeba w powyższym rozumowaniu wyrazów ciągu a_n, żeby któryś z nich do tego przedziału trafił. Po chwili namysłu można wysunąć przypuszczenie, że liczby a_n powinny trafiać do przedziału (α, β) z grubsza proporcjonalnie często do długości tego przedziału. Tego już nie udowodnimy, ale prawdą jest, że ciąg
$$\frac{\#\{a_n : 1 \leqslant n \leqslant N,\ a_n \in (\alpha, \beta)\}}{N}$$
ma dla $N \to \infty$ granicę równą $\beta - \alpha$, czyli owo naturalne przypuszczenie jest jak najbardziej słuszne. Jest to twierdzenie Bola, Sierpińskiego i Weyla o równomiernym rozkładzie. Wynika zeń, że częstości początkowych cyfr liczb 2^n są następujące: 30,1% jedynek, 17,6% dwójek, 12,5% trójek, 9,7% czwórek, 7,9% piątek, 6,7% szóstek, 5,8% siódemek, 5,1% ósemek i żałosne 4,5% dziewiątek (proszę nie dodawać, bo błędy zaokrągleń wyjdą na jaw).

Takie same są częstości, z jakimi $1, 2, \ldots, 9$ występują na początku k^n, gdy $\log k$ jest niewymierny, a więc gdy k nie jest potęgą dziesiątki. Na trop tego zjawiska wpadł w 1881 roku Simon Newcomb, astronom i matematyk, zauważywszy, że tablice logarytmiczne są bardziej wytarte na początkowych stronach. To samo wykrył pół wieku później Paul Benford, fizyk zatrudniony w firmie General Electric. Tak zwane prawo Benforda orzeka, że w różnych pochodzących z życia zestawach danych częstości początkowych cyfr są właśnie takie. W USA urzędy skarbowe i inni tropiciele oszustw finansowych z powodzeniem używają prawa Benforda w walce z tymi, którzy zamiast czytać *Deltę*, wolą np. seryjnie fałszować czeki i zbyt często wpisują na nich kwoty z dziewiątką na początku (bo w ich banku – począwszy od 10 000 – potrzebny jest przy wypłacie dodatkowy podpis kontrolera).

Rozwiązanie zadania F 759.
Prędkość piłeczki jest największa w chwili zderzenia ze ścianką. Prędkość ta jest prostopadła do ścianki, z którą piłeczka się zderza. Z symetrii problemu mamy, że:
$$v_{\max} = \frac{gt}{2\sin\alpha} \approx 7\ \mathrm{m/s}.$$
Prędkość piłeczki będzie najmniejsza w chwili, gdy osiągnie ona największą wysokość, tzn. gdy będzie ona miała kierunek poziomy:
$$v_{\min} = v_{\max}\cos\alpha \approx 5\ \mathrm{m/s}.$$

Kto lubi wygodę, płynącą ze stosowania odpowiedniej maszynerii, a roczny wykład analizy matematycznej ma za sobą, niech zajrzy do książki Fomina, Kornfelda i Sinaja o teorii ergodycznej (polski przekład ukazał się w 1987 r.), odszuka podrozdział poświęcony równomiernemu rozkładowi, a następnie sam udowodni twierdzenie Bola, Sierpińskiego i Weyla w paru linijkach (dużo treściwszych niż mój rozgadany tekst). To dzięki temu twierdzeniu wiedziałem, że wystarczy obejrzeć ledwie kilkadziesiąt milionów potęg dwójki, żeby na początku jednej z nich znaleźć właściwą datę. Gdyby Redaktor urodził się np. 17 marca, zadanie byłoby trudniejsze, a ja musiałbym dłużej nie używać laptopa do pracy.