deltoid 14

Zadanie o 20 prostych

Joanna JASZUŃSKA

Często w zadaniach geometrycznych należy wykazać, że w jednym punkcie przecinają się pewne trzy proste, czasem – że nieskończenie wiele. Tym razem zadanie chyba dość nietypowe, bo polegające na wykazaniu, że pewnych 20 prostych ma wspólny punkt.

Najpierw jednak dwa fakty pomocnicze: twierdzenie o prostej Eulera i zadanie o trapezie. W ich dowodach przydadzą się jednokładności, o których była mowa w poprzednim *deltoidzie*.

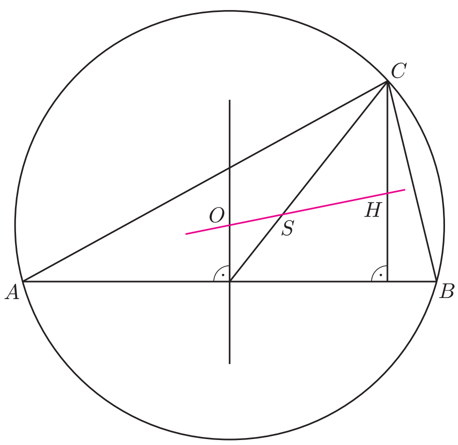
Jednokładność $\mathcal{J}_O^k$ o środku O i skali $k \neq 0$ to przekształcenie geometryczne płaszczyzny, które punktowi A przypisuje punkt $A' = \mathcal{J}_O^k(A)$ spełniający warunek $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.

Środek ciężkości trójkąta to punkt przecięcia środkowych, dzieli on każdą z nich w stosunku $2:1$, licząc od wierzchołka.

Ortocentrum trójkąta to punkt przecięcia wysokości.

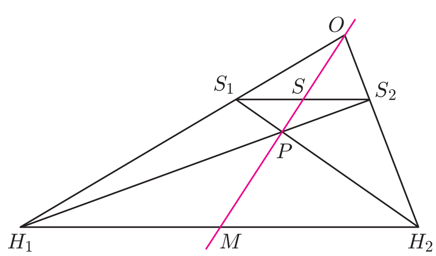
Twierdzenie o prostej Eulera. *W trójkącie ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, punkt S jest środkiem ciężkości, a punkt H jest ortocentrum. Wówczas punkty O, S, H leżą, w tej właśnie kolejności, na jednej prostej, zwanej prostą Eulera* (rys. 1). *Ponadto zachodzi równość $SH = 2 \cdot SO$.*

Dowód. Rozważmy jednokładność o środku w punkcie S i skali -2. Obrazem środka boku AB jest wierzchołek C trójkąta. Stąd obrazem symetralnej boku AB jest prosta do niej równoległa (więc prostopadła do AB) i przechodząca przez C, czyli wysokość CH trójkąta. Analogicznie jest dla pozostałych symetralnych, więc obrazem ich punktu przecięcia O jest punkt przecięcia wysokości H. Wobec tego punkty O, S, H leżą na jednej prostej, w tej kolejności (bo skala jednokładności jest ujemna) oraz $SH = 2 \cdot SO$. $\square$



Rys. 1. Prosta Eulera.

Zadanie o trapezie. Przekątne trapezu $H_1H_2S_2S_1$ przecinają się w punkcie P, przedłużenia zaś ramion H_1S_1 i H_2S_2 w punkcie O. Wykaż, że prosta OP przechodzi przez środki podstaw trapezu.



Rys. 2

R. Oznaczmy przez M i S punkty przecięcia prostej OP z podstawami odpowiednio H_1H_2 i S_1S_2 (rys. 2). Podstawa H_1H_2 wraz z punktem M jest obrazem podstawy S_1S_2 z punktem S w pewnej jednokładności prostej o środku O, a także w pewnej jednokładności odwrotnej o środku P. Stąd $H_1M/H_2M = S_1S/S_2S$ oraz $H_1M/H_2M = S_2S/S_1S$. Zatem $S_1S/S_2S = S_2S/S_1S$, czyli $S_1S = S_2S$, więc też $H_1M = H_2M$. $\square$

Zadanie o 20 prostych. Na okręgu danych jest sześć punktów. Wybieramy pewne trzy z nich i przez H_1 oznaczamy ortocentrum wyznaczonego przez nie trójkąta T_1, przez S_2 zaś – środek ciężkości trójkąta T_2 wyznaczonego przez pozostałe trzy z danych punktów. Udowodnij, że wszystkie możliwe otrzymane w ten sposób proste H_1S_2 przechodzą przez pewien ustalony punkt.

R. Oznaczmy dodatkowo przez S_1 środek ciężkości trójkąta T_1, zaś przez H_2 ortocentrum trójkąta T_2. Zauważmy, że dany okrąg jest opisany na obu rozważanych trójkątach. Zatem jego środek O oraz punkty S_1 i H_1 leżą na prostej Eulera, w tej właśnie kolejności, i $S_1H_1 = 2 \cdot S_1O$; analogicznie dla O, S_2, H_2.

Skoro
$$\frac{S_1H_1}{S_1O} = 2 = \frac{S_2H_2}{S_2O},$$
to, z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa, $H_1H_2S_2S_1$ jest trapezem. Środek ciężkości S wszystkich sześciu danych punktów jest środkiem odcinka S_1S_2. Oznaczmy P – punkt przecięcia S_1H_2 z S_2H_1 oraz M – środek odcinka H_1H_2. Z zadania o trapezie wiemy, że punkty O, S, P i M leżą na jednej prostej. Wobec tego mamy sytuację jak na rysunku 2.

Z twierdzenia Talesa
$$\frac{H_1H_2}{S_1S_2} = \frac{OH_1}{OS_1} = 3,$$
zatem $\mathcal{J}_P^{-3}(S_1S_2) = H_2H_1$ oraz $\mathcal{J}_O^3(S_1S_2) = H_1H_2$. Stąd $PM = 3 \cdot PS$ oraz $OM = 3 \cdot OS$, więc
$$PS = \frac{1}{4} \cdot SM = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot OS, \quad \text{czyli} \quad \overrightarrow{OP} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{OS}.$$
Zatem położenie punktu P, przez który przechodzi prosta H_1S_2, zależy tylko od punktów S i O, a nie od początkowego wyboru wierzchołków trójkąta T_1. $\square$

Prostych jest rzeczywiście 20, gdyż każda odpowiada wyborowi pewnej trójki z sześciu punktów, co można zrobić na $\binom{6}{3} = 20$ sposobów.