samodzielnego wypisania dalszych wierszy, co ułatwi analizę dowodu. W poniższej tabeli przez c, n i z oznaczamy odpowiednio kolor czerwony, niebieski i zielony. Znak „+” oznacza poprawną odpowiedź lub sukces, znak „−” oznacza błędną odpowiedź lub porażkę, a puste pole oznacza rezygnację z odpowiedzi. Po utworzeniu całej tabelki dowiadujemy się, że drużyna wygrywa w 15 spośród 27 przypadków.

Kolor kapelusza			Odpowiedź			Efekt
Alicji	Bartka	Marka	Alicji	Bartka	Marka	
c	c	c			+	+
c	c	n	−	−	−	−
c	n	c	+			+
z	c	n	−			−
c	n	z	−	−		−

Przypuśćmy teraz, że istnieje lepsza strategia, za pomocą której drużyna wygrywa w więcej niż 15 przypadkach, czyli przegrywa w mniej niż 12 przypadkach.

Weźmy dowolną sytuację widzianą przez osobę X, wybraną dowolnie z trójki graczy. Udzielona odpowiedź zależy tylko od sytuacji – jest taka sama we wszystkich przypadkach odpowiadających tej sytuacji. Wobec tego w dwóch z trzech przypadków odpowiadających ustalonej sytuacji odpowiedź osoby X jest błędna, a w jednym jest poprawna. Czyli każda osoba może udzielić odpowiedzi na pytanie o kolor swojego kapelusza w co najwyżej 5 sytuacjach, bo jeśli ktoś odpowiada w co najmniej 6 sytuacjach, to drużyna przegrywa w co najmniej 12 przypadkach, czyli strategia nie jest lepsza od naszej.

Skoro mamy trzy osoby, a każda z nich udziela odpowiedzi na pytanie o kolor swojego kapelusza w co najwyżej pięciu sytuacjach, a każda z tych odpowiedzi jest poprawna w dokładnie jednym przypadku, to drużyna wygrywa w co najwyżej 15 przypadkach. Jest to sprzeczne z założeniem, że stosując rozpatrywaną strategię, drużyna wygrywa w więcej niż 15 przypadkach. □

Czytelników serdecznie zachęcamy do prób rozwiązania póki co nierozwiązanego problemu kapeluszy z czterema osobami i trzema kolorami.

Literatura

[1] T. Ebert, *Applications of recursive operators to randomness and complexity*, rozprawa doktorska, University of California at Santa Barbara, 1998.

[2] N. Alon, *Problems and Results in Extremal Combinatorics. II*, Discrete Mathematics 308 (2008), 4460–4472.

[3] S. Robinson, *Why mathematicians now care about their hat color*, The New York Times, Science Times section, p. D5, April 10, 2001.

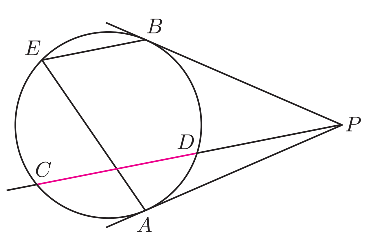
[4] A. Dąbrowski, *Kolorowe czapeczki*, Delta 7/2005, 1–5.

[5] A. Dąbrowski, *Kolorowe czapeczki – kontynuacja*, Delta 2/2006, 8–9.

Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1267. Na tablicy zapisano liczby 1 i 2. Jeśli na tablicy znajdują się już liczby m i n, to można do nich dopisać liczbę $mn + m + n$. Wykazać, że na tablicy mogą wystąpić jedynie liczby postaci $2^a \cdot 3^b - 1$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi nieujemnymi.
Rozwiązanie na str. 2



M 1268. Dany jest okrąg o. Przez punkt P leżący na zewnątrz tego okręgu poprowadzono proste styczne do okręgu o w punktach A i B (rysunek). Prosta przechodząca przez punkt P przecina okrąg o w punktach C i D. Prosta przechodząca przez punkt B i równoległa do prostej CD przecina okrąg o w punktach B i E. Udowodnić, że prosta AE przechodzi przez środek odcinka CD.
Rozwiązanie na str. 24

M 1269. Dowieść, że nie istnieje liczba całkowita dodatnia n, dla której liczby $2n^2 + 1$, $3n^2 + 1$ oraz $6n^2 + 1$ są kwadratami liczb całkowitych.
Rozwiązanie na str. 22

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 757. Ile razy zmieni się oświetlenie obrazu Słońca, otrzymanego za pomocą płasko-wypukłej soczewki, jeśli rozetniemy soczewkę wzdłuż średnicy i złożymy płaskimi stronami?
Rozwiązanie na str. 24

F 758. Ile razy mniejsze jest oświetlenie w nocy w czasie pełni od oświetlenia w południe? W obu przypadkach niebo jest bezchmurne, a wysokość Księżyca i Słońca nad horyzontem jest taka sama. Założyć, że współczynnik rozpraszania powierzchni Księżyca wynosi $\alpha = 0{,}1$.
Rozwiązanie na str. 2