Problem kapeluszy *Marcin KRZYWKOWSKI*[*]

Rozważmy następujący problem, zwany problemem kapeluszy (ang. *hat problem*). Do pokoju wchodzi n osób i każdej z nich losowo zostaje nałożony niebieski lub czerwony kapelusz. Każdy widzi kapelusze pozostałych osób, ale nie widzi swojego. Żadna komunikacja nie jest dozwolona, z wyjątkiem ustalenia strategii przed rozpoczęciem gry. Po spojrzeniu na kapelusze pozostałych każdy gracz zgaduje, jaki kolor ma jego kapelusz, lub rezygnuje z próby zgadnięcia. Odpowiedzi są udzielane w taki sposób, że pozostali gracze ich nie słyszą oraz nie dowiadują się, czy odpowiadający próbował zgadnąć, czy zrezygnował i czy odpowiedź była poprawna. Uczestnicy grają całą drużyną, która wygrywa, jeżeli co najmniej jedna osoba poprawnie odgadnie kolor swojego kapelusza i nikt inny nie poda błędnej odpowiedzi. W przeciwnym przypadku drużyna przegrywa.

Problem kapeluszy z siedmioma osobami został sformułowany przez Todda Eberta w jego rozprawie doktorskiej [1] i nazwany tam „problemem siedmiu więźniów". Noga Alon [2] podał ograniczenie dolne na szansę sukcesu dla uogólnionego problemu kapeluszy z n osobami i q kolorami. Po konferencji w Nowym Orleanie, dzięki której problem kapeluszy zdobył zainteresowanie matematyków, a także mediów, w artykule w *The New York Times* [3] przedstawiono problem kapeluszy z trzema osobami i jego związek z teorią kodów Hamminga. Problem kapeluszy ma powiązania z wieloma zagadnieniami informatycznymi i matematycznymi, na przykład z programowaniem liniowym, programowaniem genetycznym, aproksymacją funkcji boolowskich oraz autoredukowalnością ciągów losowych, a także znajduje zastosowania w innych dziedzinach nauki, między innymi w biologii i ekonomii.

Łatwo zauważyć, że gdyby próbować rozwiązać problem kapeluszy, analizując wszystkie możliwe strategie, to złożoność obliczeniowa tego zagadnienia spowoduje, iż już dla wcale nie tak dużych liczb n i q (liczba osób i liczba kolorów, odpowiednio), problem nie zostanie rozwiązany przez komputer w żadnym rozsądnym czasie.

Problemem tym zainteresowałem się, czytając artykuł w *Delcie* (zob. [4]). W tym artykule problem kapeluszy został przedstawiony w kontekście kodów Hamminga i tzw. kodów wykrywających błędy, dzięki którym możemy, na przykład, korzystać z płyty CD pomimo zarysowań. W kolejnym artykule dotyczącym tego zagadnienia (zob. [5]) przedstawiono pewne modyfikacje problemu wraz z rozwiązaniami. Autor zachęcał również czytelników do zmierzenia się z problemem kapeluszy z trzema kolorami i n osobami. Najprostszy przypadek, czyli zadanie z trzema osobami i trzema kolorami, rozwiązujemy w niniejszym artykule. Jak dotąd, nie jest znane rozwiązanie problemu dla żadnej liczby $n > 3$ osób przy trzech kolorach kapeluszy.

Rozpatrujemy problem kapeluszy z trzema osobami (Alicja, Bartek i Marek) i trzema kolorami (czerwony, niebieski i zielony). Podamy strategię dla tego problemu i udowodnimy, że jest ona optymalna.

Strategia. Alicja, Bartek i Marek postępują następująco.
Alicja: jeśli Alicja widzi, że Bartek i Marek mają kapelusze różnych kolorów, to stwierdza, że ma kapelusz takiego koloru jak Marek. Jeśli zaś Bartek i Marek mają kapelusze tego samego koloru, to rezygnuje z odpowiedzi.
Bartek: jeśli Bartek widzi, że Alicja i Marek mają kapelusze różnych kolorów, to stwierdza, że ma kapelusz takiego koloru jak Marek. Jeśli zaś Alicja i Marek mają kapelusze tego samego koloru, to rezygnuje z odpowiedzi.
Marek: jeśli Marek widzi, że Alicja i Bartek mają kapelusze tego samego koloru, to stwierdza, że ma kapelusz takiego koloru jak oni. Jeśli zaś Alicja i Bartek mają kapelusze różnych kolorów, to rezygnuje z odpowiedzi.

Udowodnimy, że powyższa strategia jest optymalna, czyli nie istnieje żadna lepsza strategia (deterministyczna).

W naszych rozważaniach przez *przypadek* rozumiemy konkretny układ kapeluszy na głowach graczy. W badanym przez nas problemie kapeluszy z trzema osobami i trzema kolorami jest $3^3 = 27$ możliwych przypadków. Przez *sytuację*, którą widzi dana osoba, rozumiemy układ kapeluszy na głowach wszystkich osób poza tą jedną. W rozwiązywanym przez nas problemie każdy widzi jedną z $3^2 = 9$ możliwych sytuacji.

Twierdzenie. *Powyższa strategia jest optymalna dla problemu kapeluszy z trzema osobami i trzema kolorami.*

Dowód. Naszą strategię łatwo przedstawić za pomocą tabeli. Poniżej podaliśmy kilka przykładowych wierszy tabeli dla naszej strategii. Zachęcamy do

[*]Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej, Politechnika Gdańska

samodzielnego wypisania dalszych wierszy, co ułatwi analizę dowodu. W poniższej tabeli przez c, n i z oznaczamy odpowiednio kolor czerwony, niebieski i zielony. Znak „+” oznacza poprawną odpowiedź lub sukces, znak „–” oznacza błędną odpowiedź lub porażkę, a puste pole oznacza rezygnację z odpowiedzi. Po utworzeniu całej tabelki dowiadujemy się, że drużyna wygrywa w 15 spośród 27 przypadków.

Kolor kapelusza			Odpowiedź			Efekt
Alicji	Bartka	Marka	Alicji	Bartka	Marka	
c	c	c			+	+
c	c	n	–	–	–	–
c	n	c	+			+
z	c	n	–			–
c	n	z	–	–		–

Przypuśćmy teraz, że istnieje lepsza strategia, za pomocą której drużyna wygrywa w więcej niż 15 przypadkach, czyli przegrywa w mniej niż 12 przypadkach.

Weźmy dowolną sytuację widzianą przez osobę X, wybraną dowolnie z trójki graczy. Udzielona odpowiedź zależy tylko od sytuacji – jest taka sama we wszystkich przypadkach odpowiadających tej sytuacji. Wobec tego w dwóch z trzech przypadków odpowiadających ustalonej sytuacji odpowiedź osoby X jest błędna, a w jednym jest poprawna. Czyli każda osoba może udzielić odpowiedzi na pytanie o kolor swojego kapelusza w co najwyżej 5 sytuacjach, bo jeśli ktoś odpowiada w co najmniej 6 sytuacjach, to drużyna przegrywa w co najmniej 12 przypadkach, czyli strategia nie jest lepsza od naszej.

Skoro mamy trzy osoby, a każda z nich udziela odpowiedzi na pytanie o kolor swojego kapelusza w co najwyżej pięciu sytuacjach, a każda z tych odpowiedzi jest poprawna w dokładnie jednym przypadku, to drużyna wygrywa w co najwyżej 15 przypadkach. Jest to sprzeczne z założeniem, że stosując rozpatrywaną strategię, drużyna wygrywa w więcej niż 15 przypadkach. □

Czytelników serdecznie zachęcamy do prób rozwiązania póki co nierozwiązanego problemu kapeluszy z czterema osobami i trzema kolorami.

Literatura

[1] T. Ebert, *Applications of recursive operators to randomness and complexity*, rozprawa doktorska, University of California at Santa Barbara, 1998.

[2] N. Alon, *Problems and Results in Extremal Combinatorics. II*, Discrete Mathematics 308 (2008), 4460–4472.

[3] S. Robinson, *Why mathematicians now care about their hat color*, The New York Times, Science Times section, p. D5, April 10, 2001.

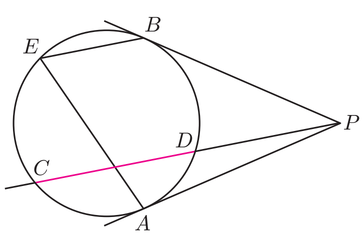
[4] A. Dąbrowski, *Kolorowe czapeczki*, Delta 7/2005, 1–5.

[5] A. Dąbrowski, *Kolorowe czapeczki – kontynuacja*, Delta 2/2006, 8–9.

Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1267. Na tablicy zapisano liczby 1 i 2. Jeśli na tablicy znajdują się już liczby m i n, to można do nich dopisać liczbę $mn + m + n$. Wykazać, że na tablicy mogą wystąpić jedynie liczby postaci $2^a \cdot 3^b - 1$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi nieujemnymi.
Rozwiązanie na str. 2



M 1268. Dany jest okrąg o. Przez punkt P leżący na zewnątrz tego okręgu poprowadzono proste styczne do okręgu o w punktach A i B (rysunek). Prosta przechodząca przez punkt P przecina okrąg o w punktach C i D. Prosta przechodząca przez punkt B i równoległa do prostej CD przecina okrąg o w punktach B i E. Udowodnić, że prosta AE przechodzi przez środek odcinka CD.
Rozwiązanie na str. 24

M 1269. Dowieść, że nie istnieje liczba całkowita dodatnia n, dla której liczby $2n^2 + 1$, $3n^2 + 1$ oraz $6n^2 + 1$ są kwadratami liczb całkowitych.
Rozwiązanie na str. 22

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 757. Ile razy zmieni się oświetlenie obrazu Słońca, otrzymanego za pomocą płasko-wypukłej soczewki, jeśli rozetniemy soczewkę wzdłuż średnicy i złożymy płaskimi stronami?
Rozwiązanie na str. 24

F 758. Ile razy mniejsze jest oświetlenie w nocy w czasie pełni od oświetlenia w południe? W obu przypadkach niebo jest bezchmurne, a wysokość Księżyca i Słońca nad horyzontem jest taka sama. Założyć, że współczynnik rozpraszania powierzchni Księżyca wynosi $\alpha = 0{,}1$.
Rozwiązanie na str. 2