Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2010

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 583 ($WT = 1{,}45$) i 584 ($WT = 1{,}54$) z numeru 6/2009

Jerzy Cisło	6–44,31
Marek Prauza	3–42,39
Tomasz Warszawski	2–42,26
Zbigniew Galias	1–42,05
Tomasz Tkocz	1–41,42
Tomasz Wietecha	7–37,49
Witold Bednarek	4–36,92
Franciszek S. Sikorski	35,70
Wojciech Maciak	35,69
Bartłomiej Dyda	4–34,68
Łukasz Garncarek	1–33,48
Adam Woryna	2–32,71
Andrzej Daniluk	2–29,74
Jan Czardybon	29,57
Zbigniew Skalik	1–29,36
Jacek Jendrej	27,67
Joachim Jelisiejew	27,50
Joanna Bogdanowicz	26,02
Michał Kieza	3–23,58
Wojciech Świeboda	23,15
Paweł Łabędzki	23,04
Tomasz Choczewski	22,41
Michał Miodek	21,18
Andrzej Dorobisz	20,89
Piotr Żmijewski	1–20,21
Piotr Kumor	10–20,13

Legenda (przykładowo): stan konta 4–36,92 oznacza, że uczestnik już czterokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (piątej) rundzie ma 36,92 punktów.

Listę otwiera **Jerzy Cisło**, który zgromadził na swoim koncie 44 punkty już po raz siódmy!

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2007, 2008 lub 2009.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, *J. Ciach* (5), M. Prauza,

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 595, 596

Redaguje Marcin E. KUCZMA

595. Na bokach AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$ odłożono odcinki AK, BL, CM, DN jednakowej długości. Dowieść, że jeżeli czworokąt $KLMN$ jest kwadratem, to także czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

596. Dla każdej pary dodatnich liczb całkowitych m, n obliczyć największy wspólny dzielnik liczb $u = (n+1)^m - n$ oraz $v = (n+1)^{m+2} - n$.

Zadanie 596 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2009

Przypominamy treść zadań:

587. Dana jest liczba dodatnia $a \leqslant 1/2$. Określamy ciąg (x_n) wzorami:
$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = x_n - ax_n^2 \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$
Dowieść, że ciąg (nx_n) jest zbieżny i obliczyć jego granicę.

588. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ równanie
$$x^2 + xy + y^2 = 13^n$$
ma rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y.

587. Funkcja $x \mapsto x(1-ax)$ odwzorowuje przedział $(0;1\rangle$ w siebie, więc (x_n) jest ciągiem liczb dodatnich. Jest to ciąg malejący ($x_n - x_{n+1} = ax_n^2$), zatem zbieżny. Jego granica g spełnia równanie $g = g(1-ag)$, czyli jest równa zeru.

Weźmy pod uwagę ciąg (y_n) o wyrazach $y_0 = 1$,
$$y_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \qquad \text{dla } n \geqslant 1.$$
Z przekształcenia
$$y_n = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} = \frac{ax_n^2}{x_n(x_n - ax_n^2)} = \frac{a}{1 - ax_n}$$
widać, że $y_n \to a$. Zatem liczba a jest też granicą ciągu o wyrazach
$$\frac{y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}}{n} = \frac{1}{n}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k}\right)\right) = \frac{1}{n}\left(1 + \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_1}\right)\right) = \frac{1}{nx_n}.$$
A to znaczy, że $nx_n \to 1/a$.

588. Przekształcenie liniowe ($x' = 4x + y$, $y' = -x + 3y$) indukuje przekształcenie formy kwadratowej $Q(x,y) = x^2 + xy + y^2$:
$$Q(x', y') = (4x+y)^2 + (4x+y)(-x+3y) + (-x+3y)^2 = 13Q(x,y).$$
Para liczb $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ spełnia równanie $Q(x_0, y_0) = 1$. Rekurencja ($x_{n+1} = 4x_n + y_n$, $y_{n+1} = -x_n + 3y_n$) określa wobec tego ciąg par liczb (x_n, y_n), spełniających równania $Q(x_n, y_n) = 13^n$.

* * *

P. Kumor (10), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (11), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (7), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (4), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit (4), J. Cisło (7), W. Bednarek (4), D. Kurpiel, P. Najman (4), M. Kieza, M. Kasperski, K. Dorobisz (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, T. Warszawski, A. Woryna, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Dzedzej, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, Ł. Garncarek, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, A. Idzik, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Jóźwik, K. Kamiński, G. Karpowicz, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, M. Łupieżowiec, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, T. Tkocz, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Janusz Olszewski jest bohaterem tego sezonu ligi matematycznej. Jedenaście pełnych rund – jedenaście razy 44 punkty, absolutny rekord. Po pierwszych nadesłanych rozwiązaniach (5/1990) – uczestnictwo początkowo nieregularne, ze sporymi przerwami. Ale przez ostatnie parę lat rytm jest ustabilizowany: co dwanaście numerów – kolejne przekroczenie bariery 44. Serdecznie gratulujemy! Panie Januszu, tak dalej trzymać! Jeszcze mały wysiłek, trzy razy tyle, co dotąd, i będzie 44×44.

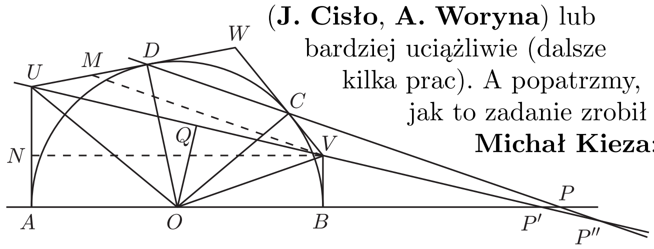
Jedenaście to spora liczba. Jednak przegrywa z liczbą czternaście – a tyle rund ma na swym koncie inny, doskonale nam znany uczestnik **obu lig** – matematycznej i fizycznej, pan **Tomasz Wietecha**. W każdej po siedem rund. Imponujący wynik. Serdecznie gratulujemy! Dziękujemy za już, prosimy o jeszcze. I czekamy na godnych naśladowców pana Tomasza w dwuboju.

Teraz coś innego. Jeden z Czytelników wyraził w swoim liście prośbę „żeby omówienie nie przebiegało pod hasłem: co znowu spieprzył redaktor ligi”. Tak się fortunnie składa, że da się tę prośbę spełnić w sposób wręcz doskonały – pisząc mianowicie, co się redaktorowi udało *nie spartaczyć*. Otóż znalazło się wśród nadesłanych propozycji zadanie o wielościanie (ostrosłupie) mającym sferę wpisaną, spełniającą pewne warunki. Należało wykazać, że suma dwóch kątów spełnia jakąś nierówność.

Proponowany dowód był poprawny, zadanie znalazło uznanie, i dopiero na etapie korekty redaktor ligi spostrzegł, że jest w stanie również uzasadnić nierówność odwrotną. A także każdą inną tezę, bowiem założenia są sprzeczne; wielościan, spełniający podane warunki, nie istnieje. Zadanie zostało w ostatniej chwili wymienione – choć właściwie mogłoby pójść: od strony formalno-logicznej błędu przecież nie ma. Jednak chyba lepiej, że nie poszło.

I taka refleksja: jakby to było pięknie, gdyby redaktor ligi mógł przyrzec, że już nigdy żadnej pomyłki nie popełni... Jednak redaktor zdecydowanie odmawia związania się taką obietnicą i zamiast tego przechodzi do omówienia najciekawszych rozwiązań zadań, uogólnień rezultatów oraz uwag uczestników ligi.

Zadanie **569** [Czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg; środek O, średnica AB; $AB \cap CD = \{P\}$; $o(OBC) \cap o(ODA) = \{O, Q\} \Rightarrow OQ \perp PQ$] (współczynnik trudności $WT = 2{,}43$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 12$). Ile prac, tyle metod. Tu się można było popisać erudycją: prosta biegunowa plus inwersja (**A. Dorobisz**), inwersja plus okrąg Feuerbacha (**J. Olszewski**), okrąg Feuerbacha plus twierdzenie Desargues’a (**K. Dorobisz**), osie potęgowe (firmowo). Można też było, całkiem elementarnie, przeprowadzić staranny rachunek na kątach – krótko i zgrabnie (**J. Cisło**, **A. Woryna**) lub bardziej uciążliwie (dalsze kilka prac). A popatrzmy, jak to zadanie zrobił **Michał Kieza**:



Styczne do danego okręgu w punktach A, B, C, D wyznaczają pięciokąt $ABVWU$ z kątami prostymi A i B (rysunek; przyjmujemy $|AU| > |BV|$). Odcinki OU i OV są średnicami okręgów ODA i OBC; ich wspólna cięciwa OQ tworzy kąty proste z odcinkami QU, QV, więc $Q \in UV$ i wystarczy wykazać, że proste AB, UV, DC mają punkt wspólny. Niech $AB \cap UV = \{P'\}$, $DC \cap UV = \{P''\}$ i niech $M \in UD$, $N \in UA$: $MV \parallel DC$, $NV \parallel AB$; wtedy $|UP'| : |UV| = |UA| : |UN|$, zaś $|UP''| : |UV| = |UD| : |UM|$. Otrzymane stosunki są równe, bo $|UA| = |UD|$ oraz $|NA| = |VB| = |VC| = |MD|$. Zatem $P' = P''$.

Zadanie **571** [Pionki na płaszczyźnie kratowej; start – jeden pionek; ruchy – zastępowanie pionka przez dwa pionki na wolnych polach przyległych $\Rightarrow$ istnieje zbiór skończony Z, w którym stale jakieś pole jest zajęte (im mniejszy Z, tym lepsze rozwiązanie)] ($WT = 2{,}71$; $LPR = 6(8?)$). Bezbłędne dowody (**K. Dorobisz**, **A. Dzedzej**, **Z. Galias**, **J. Olszewski**, **W. Świeboda**, **A. Woryna**) identyczne z firmowym – niemalejący półniezmiennik: suma liczb $2^{-|i|-|j|}$ po zajętych polach (i, j); jeszcze dwie „zasadniczo dobre” prace z usterkami (niedopracowane uzasadnienia lub niedokładnie odczytana treść).

Ta metoda pozwala wskazać zbiór Z (o jaki chodzi), mający 57 pól. Czy da się znaleźć mniejszy? **Krzysztof Dorobisz** zdołał zejść do 52, biorąc zbiór złożony z pól (i, j), gdzie $|i| + |j| \leqslant 5$, z usuniętymi polami $(\pm 5, 0)$, $(\pm 4, 0)$, $(0, \pm 5)$, $(0, \pm 4)$ oraz $(1, 4)$; uzasadnienie w szczegółach – uciążliwe. Ciekawe, jak wygląda minimalny taki zbiór Z...

Zadanie **574** [Czworościan; sfery dopisane styczne do ścian w środkach okręgów wpisanych $\Rightarrow$ czworościan foremny] ($WT = 2{,}64$; $LPR = 7$). Rozwiązanie firmowe (analiza kątów płaskich na ścianach), podane przez autora zadania (**M. Kieza**), znaleźli także: **J. Cisło**, **A. Dorobisz**, **T. Warszawski**. Natomiast

K. Dorobisz, **J. Olszewski**, **A. Woryna** uzasadniają najpierw równość wszystkich kątów dwuściennych, a stąd już niedaleko do tezy.

Zadanie **576** [A, G – średnie (arytm., geom.) liczb $a, b, c \geqslant 0 \Rightarrow A - G \leqslant \max(u, v, w)$, gdzie $u = \left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2$, $v = \left(\sqrt{c} - \sqrt{a}\right)^2$, $w = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$] ($WT = 1{,}55$; $LPR = 15$). Wielu uczestników dowodzi nierówności nieco mocniejszej: $A - G \leqslant (u + v + w)/3$. Inne ciekawe jej wzmocnienie wskazuje **Andrzej Daniluk** (bez pełnego dowodu, który wszelako łatwo uzyskać przez modyfikację rozwiązania firmowego): różnica $A - G$ leży między 1/3 a 2/3 liczby $\max(u, v, w)$.

Adam Woryna daje uogólnienie na n liczb $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$:

$$\frac{1}{n}\sum a_i - \left(\prod a_i\right)^{1/n} \leqslant \max_{i<j}(\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2;$$

dowód za długi, by go tu przytoczyć.

Zadanie **578** [$a_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + \ldots (n-1)\sqrt{1+n}}}$; $\lim a_n = ?$] ($WT = 2{,}39$; $LPR = 8$). Bezbłędne rozwiązania: **J. Cisło**, **A. Daniluk**, **P. Drobiński**, **K. Kamiński**, **J. Olszewski**, **T. Tkocz**, **A. Woryna** oraz **K. Dorobisz**. Poza ostatnim z wymienionych, wszyscy robili to podobnie, przy tym prościej niż w rozwiązaniu firmowym. Przy dość znacznych różnicach w opracowaniach – wspólna idea: rozważa się *dwie* nieskończone macierze $[b_{n,k}]$, $[c_{n,k}]$ $(n \geqslant k \geqslant 1)$, generowane przez jednakową zależność rekurencyjną

$$kb_{n,k} = b_{n,k-1}^2 - 1, \qquad kc_{n,k} = c_{n,k-1}^2 - 1$$

oraz warunki brzegowe $b_{n,n} = 1$, $c_{n,n} = n + 2$; łatwo sprawdzić, że wówczas

$$b_{n,1} = a_n \quad \text{oraz} \quad c_{n,k} = k + 2 \quad \text{dla} \ \ n \geqslant k \geqslant 1.$$

Jasne, że $1 < b_{n,k} < c_{n,k}$ dla $n > k \geqslant 1$. Różnymi sposobami można teraz szacować różnicę $d_{n,k} = c_{n,k} - b_{n,k}$, na przykład tak:

$$kd_{n,k} = (c_{n,k-1} + b_{n,k-1})d_{n,k-1} > (k+2)d_{n,k-1}.$$

Wymnażając te nierówności dla $k = 2, \ldots, n$ (przy ustalonym $n \geqslant 4$), skracając co się da oraz uwzględniając związki $d_{n,n} = n + 1$, $0 < d_{n,1} = 3 - a_n$, dostaje się dwustronne oszacowanie $3 - 6/(n+2) < a_n < 3$ i wynik $\lim a_n = 3$.

K. Kamiński zauważa, że (nieco ogólniej) $b_{n,k} \to k + 2$ przy $n \to \infty$ i ustalonym k.

Ciekawe uogólnienie znajduje **J. Olszewski**, dowodząc, że równanie funkcyjne $f(x)^2 = xf(x+b) + ax + (a+b)^2$ (ze stałymi $a, b \geqslant 0$) ma w klasie funkcji $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ jedyne rozwiązanie $f(x) = x + a + b$; wykorzystuje technikę zastosowaną w rozwiązaniu zadania ligowego, budując ciąg funkcji dany przez rekurencję $f_{n+1}(x)^2 = xf_n(x+b) + ax + (a+b)^2$.

Zadanie **580** [$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągła, $\sum_{(x,y,z)\text{-cykl}} f(x + f(y+z)) = 0 \Rightarrow f = ?$] ($WT = 2{,}55$; $LPR = 9$). Wszystkie rozwiązania podobne do firmowego. Na uwagę zasługuje eleganckie dopracowanie końcówki (**A. Woryna**) – po uzyskaniu równości $f(0) = 0$ oraz

$$(*) \qquad f(x) = -2f(f(x))$$

mamy przypadki: gdy ciągła funkcja f jest nieograniczona z góry lub z dołu, to zbiór jej wartości zawiera przedział $\langle 0; \infty)$ lub $(-\infty; 0\rangle$ i wobec $(*)$ zawiera też drugi z tych przedziałów; zatem f jest „na" i wzór $(*)$ daje $f(x) = -x/2$. Gdy zaś f jest ograniczona i z góry i z dołu, to funkcja $h(x) = x + f(2x)$ jest „na"; wówczas wyjściowe równanie z $x = y = z$ daje $f(h(x)) = 0$, więc f jest tożsamościowo równa zeru.

Można pytać o istotność założenia ciągłości f. Autor zadania, pan **Tomasz Tkocz**, zwrócił uwagę, że jeśli f spełnia zadane równanie, to funkcja $g(x) = f(x + f(-x))$ jest addytywna (co nietrudno sprawdzić, kładąc $z = -x - y$). Wiadomo, że bardzo słabe założenia o regularności funkcji addytywnej g gwarantują jej liniowość (skąd, znów nietrudno, choć nie natychmiast, $f(x) = -x/2$ lub $f(x) = 0$). Zatem każde założenie o funkcji f, które implikuje dowolne z owych „bardzo słabych założeń" o g, wystarczy dla tezy zadania (na przykład: f nierosnąca $\Rightarrow$ g nierosnąca $\Rightarrow$ g liniowa; itp.).

Autor zadania zwierzył się też, że inspirację pomysłu dała (znana w geometrii różniczkowej) tożsamość Jacobiego dla nawiasu Poissona: $\sum_{(F,G,H)\text{-cykl}}\{F, \{G, H\}\} = 0$.

Zadanie **581** [$|X| = n \geqslant 4$; $A_1, \ldots, A_m \subset X$, $m = 2^{n-2} + 1 \Rightarrow \exists\, i, j, k, l\colon |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| \leqslant 1$] ($WT = 3{,}31$; $LPR = 3$). Najtrudniejsze zadanie w tym sezonie. Dobre rozwiązania: **M. Kieza**, **J. Olszewski** (istota dowodu, jak w rozwiązaniu firmowym) oraz **A. Woryna** – odsyłacz do pracy P. Frankl, N. Tokushige, *Weighted* 3-*wise* 2-*intersecting families*, J. Comb. Th. (A) 100 (2002) (www.cc.u-ryukyu.ac.jp/~hide/publist.html), z rezultatów której wynika, że przy podanych założeniach istnieją wręcz *trzy* takie zbiory, że $|A_i \cap A_j \cap A_k| \leqslant 1$ (dowody w tej pracy mocno techniczne; liczne przypadki).

W kilku próbach rozwiązań ich autorzy wywodzą tezę ze stwierdzenia, że w „najbardziej niekorzystnej" konfiguracji jest, jak trzeba – tyle, że bez dowodu owej skrajnej niekorzystności. Uzupełnienie tej „ustereczki" to dokładnie tyle, co zrobienie zadania.

Zadanie **584** [$a, b, c > 0$; $U = \sum_{\text{cykl}} a^2b$, $V = \sum_{\text{cykl}} ab^2$; $A = a^3 + abc$, $B = b^3 + abc$, $C = c^3 + abc \Rightarrow \sqrt{UV} \geqslant abc + \sqrt[3]{ABC}$] ($WT = 1{,}54$; $LPR = 10$). Prawie wszystkie rozwiązania jak firmowe, mało frapujące. Z jednym wyjątkiem; oddajmy głos mistrzowi. **Janusz Olszewski**: z nierówności średnich dla trójek liczb ab^2, bc^2, ca^2 oraz $aB/b, bC/c, cA/a$ wychodzi, że $V \geqslant 3abc$ oraz $2V \geqslant 3\sqrt[3]{ABC}$, zatem prawa strona dowodzonej nierówności nie przekracza V; przez symetrię nie przekracza też U, więc i $\sqrt{UV}$. (!!)

I jeszcze uogólnienie dla $a_1, \ldots, a_n > 0$: jeśli $U = \sum_{i:\text{cykl}} a_i^l a_{i+1}^k$, $V = \sum_{i:\text{cykl}} a_i^k a_{i+1}^l$, $P = \prod_{i:\text{cykl}} a_i^{k+l}$, $Q = \prod_{i:\text{cykl}}(a_i^{k+l} + a_i^l a_{i+1}^{k-l} a_{i+2}^l)$, to

$$\min(U, V) \geqslant \frac{n}{3}\sqrt[n]{P} + \frac{n-1}{2}\sqrt[n]{Q}$$

(dowód tą samą metodą).

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2010

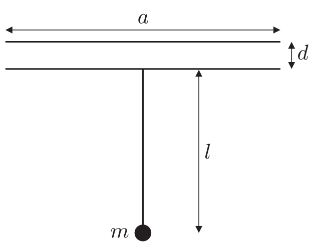
Zadania z fizyki nr 492, 493

Redaguje Jerzy B. BROJAN

492. Pociąg o masie 500 ton został rozpędzony na drodze 300 m od spoczynku do prędkości 20 m/s przez lokomotywę, której moc była stała. Oblicz wartość tej mocy.

493. Siłomierz waży 1 N i daje dokładne wskazania, gdy jest w pozycji poziomej. Gdy zawieszono go za jeden koniec, wskazanie siłomierza było równe F_1, a gdy za drugi, wskazanie było równe F_2. Czy zawsze musi być spełnione równanie $F_1 + F_2 = 1$ N?

Rozwiązania zadań z numeru 10/2009



Przypominamy treść zadań:

484. Okładki kondensatora są prostokątami o wymiarach a i b, a odległość między ich środkami jest równa d, przy czym $d \ll a$, $d \ll b$. Górna okładka jest pozioma i nieruchoma, a dolna może się obracać wokół osi równoległej do boku b i przechodzącej przez jej środek. Dolna okładka jest sztywno połączona z prętem o długości l, na końcu którego znajduje się ciężarek o masie m (rysunek). Naładowano kondensator do napięcia U. Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby pionowe położenie pręta (kiedy okładki są równoległe) było położeniem równowagi trwałej?

485. Mamy trzy jednakowe ciała, których ciepło właściwe jest stałe (nie zależy od temperatury), a temperatury wynoszą 100 K, 200 K i 300 K. Do jakiej maksymalnej temperatury można ogrzać jedno z tych ciał, jeśli energia przepływa tylko między nimi, przy czym możemy wykorzystywać maszyny cieplne?

484. Wprowadźmy kąt przechyłu dolnej okładki δ oraz współrzędną poziomą x $(-a/2 < x < a/2)$. Jeśli kąt δ jest mały, to natężenie pola elektrycznego kondensatora jest lokalnie takie, jak dla kondensatora płaskiego o odległości okładek równej $d - x\delta$, czyli

$$E = \frac{U}{d - x\delta} \approx \frac{U}{d}\left(1 + \frac{x\delta}{d}\right).$$

Gęstość powierzchniowa ładunku na okładce jest opisana wyrażeniem $\sigma = \varepsilon_0 E$, a siłę $\mathrm{d}F$ działającą ze strony górnej okładki na jednostkę powierzchni $\mathrm{d}S$ dolnej znajdziemy, mnożąc σ przez natężenie pola jednej okładki (czyli $E/2$). Z dokładnością do wyrazów liniowych w δ,

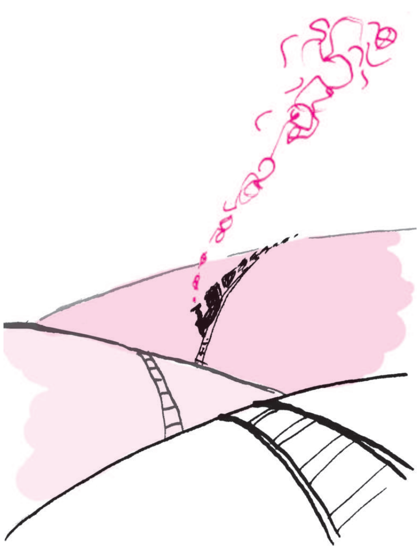
$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2d^2}\left(1 + \frac{2x\delta}{d}\right).$$

Moment siły działającej na dolną okładkę M obliczymy drogą całkowania

$$M = \int_{-a/2}^{a/2} b\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} x \,\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon_0 b U^2 a^3 \delta}{12d^3}.$$

Zwrot tego momentu sprzyja wzrostowi kąta δ, zatem równowagę trwałą może zapewnić większy moment siły ciężkości ciężarka na końcu pręta. Jest on równy $mgl\delta$, więc szukany warunek równowagi trwałej ma postać

$$12mgld^3 > \varepsilon_0 b U^2 a^3.$$



485. Oznaczmy temperatury początkowe jako T_1, T_2 i T_3, a końcowe jako T_1', T_2' i T_3'. Przy jednakowych i stałych ciepłach właściwych z zasady zachowania energii wynika równanie

$$T_1 + T_2 + T_3 = T_1' + T_2' + T_3'.$$

Podczas działania doskonałej maszyny cieplnej kontaktującej się z termostatami o temperaturach T_1 i T_2 spełniona jest nierówność

$$\frac{\mathrm{d}Q_1}{T_1} \geqslant -\frac{\mathrm{d}Q_2}{T_2},$$

a uzyskana energia (praca silnika) może być zmagazynowana w celu zasilania następnej maszyny cieplnej. Przy wymienionych poprzednio założeniach dochodzimy do nierówności

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{T_1} \geqslant -\frac{\mathrm{d}T_2}{T_2},$$

Rozwiązanie zadania M 1269.
Jeśli liczby $2n^2+1$, $3n^2+1$ oraz $6n^2+1$ są kwadratami liczb całkowitych, to także liczby $(2n^2+1)\cdot 9n^2 = 18n^4 + 9n^2$ oraz $(3n^2+1)(6n^2+1) = 18n^4 + 9n^2 + 1$ są kwadratami liczb całkowitych. Jednak dwie kolejne liczby całkowite dodatnie nie mogą być jednocześnie kwadratami liczb całkowitych. Otrzymaliśmy sprzeczność.

równoważnej nierówności $d(\ln(T_1)) \geqslant -d(\ln(T_2))$. Zatem $d(T_1T_2) \geqslant 0$, tzn. iloczyn temperatur jest funkcją niemalejącą. Gdy maszyna cieplna kontaktuje się z trzema termostatami, ostatecznym wnioskiem jest nierówność

$$T_1T_2T_3 \leqslant T_1'T_2'T_3'.$$

Pozostaje nieco matematyki – należy wykazać, że maksymalna wartość jednej z temperatur (np. T_3') występuje wtedy, gdy nierówność przechodzi w równość (tzn. stosujemy idealne maszyny cieplne), a pozostałe dwie temperatury są sobie równe. Otrzymujemy równanie III stopnia względem T_3', a więc podamy tylko rozwiązanie numeryczne: $T_3' = 330{,}5$ K.

* * *

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44F
po 481 zadaniach

Krzysztof Magiera (Łosiów)	1 – 35,98
Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	2 – 28,18
Michał Koźlik (Gliwice)	25,50
Radosław Poleski (Kołobrzeg)	23,47
Jacek Konieczny (Poznań)	19,16
Jerzy Witkowski (Radlin)	2 – 16,54
Ryszard Woźniak (Kraków)	13,77

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2007–2009 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 10 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (9), T. Wietecha (7), J. Łazuka, M. Wójcicki (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44F (alfabetycznie):

„dwukrotni”:
J. Lipkowski, A. Nowogrodzki, P. Perkowski, J. Witkowski;

„jednokrotni”:
A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, K. Kapcia, K. Magiera, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach.

Jak co roku, przyjrzyjmy się rozwiązaniom przysłanym przez Czytelników (a także pomyłkom redaktora rubryki).

Zadanie **466** [Hamowanie metra i pomiar czasu] (współczynnik trudności $WT = 1{,}03$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 10$). Wartość WT, a także rekordowo duża (jak na ligę fizyczną) liczba poprawnych rozwiązań wskazują, że zadanie było bardzo łatwe. Zapewne nie należy się temu dziwić, gdyż wzory na ruch jednostajnie zmienny należą do najbardziej oklepanych w fizyce szkolnej. Niezbędne przekształcenia algebraiczne były jednak nieco uciążliwe; ciekawe, że akurat to nie sprawia naszym Czytelnikom trudności, chociaż zupełnie elementarne zadania wymagające jakościowego opisu różnych zjawisk fizycznych nie cieszą się taką popularnością.

Zadanie **467** [Obrót chmury elektronowej w polu magnetycznym] ($WT = 2{,}71$, $LPR = 5$). Spośród dobrych rozwiązań należy wyróżnić nadesłane przez p. **Tomasza Wietechę** – jedyne, w którym pole magnetyczne chmury zostało wzięte pod uwagę. Jego indukcja została nawet obliczona ściśle, choć wystarczyło tylko zauważyć, że wobec podanego założenia o nierelatywistycznym ruchu elektronów jest ono znacznie słabsze od pola zewnętrznego.

Zadanie **471** [Wzbudzenie obrotu naładowanego pręta przez włączenie przepływu prądu w zwojnicy] ($WT = 1{,}75$, $LPR = 2$). W rozwiązaniu firmowym pominięto powrotny strumień pola magnetycznego na zewnątrz zwojnicy, co dla danych wartości liczbowych było raczej uzasadnione, ale zasługiwało na dyskusję. Dobre rozwiązania nadesłali **J. Witkowski** i **M. Koźlik**, a także **T. Wietecha** – to trzecie jednak było spóźnione i z tego względu nie zostało zaliczone do punktacji.

Zadanie **472** [Jakościowy wybór skali elektroskopu] ($WT = 1{,}90$, $LPR = 5$). W rozwiązaniu firmowym ukryło się przeoczenie tak banalne, że aż zawstydzające – pominięcie zależności siły Coulomba od odległości między prętem a różnymi częściami listka. Uwzględnienie tego elementu dałoby zależność między ładunkiem elektroskopu q a kątem odchylenia listka φ w postaci

$$q^2 \sim \frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi},$$

czyli w pobliżu $\varphi = 0$ skala elektroskopu powinna być „rozsunięta”. Sporo jest tu jednak punktów wątpliwych, przede wszystkim – jak silna jest zależność od φ rozkładu ładunków na pręcie i listku? A czy grubość listka i pręta nie łagodzi wzrostu siły Coulomba dla małych φ na tyle, że w praktyce podany przez autora wybór skali jest może jednak prawidłowy? Nie da się ukryć, że zadanie było trudne, a rozwiązanie firmowe – niedopracowane, poczucie sprawiedliwości nakazuje więc pobłażliwość wobec niepewnych elementów w pracach Czytelników.