Jaka logika jest intuicyjna?

Marek CZARNECKI, Krzysztof KAPULKIN***

Profesorowi Pawłowi Urzyczynowi
z podziękowaniem za wiele pięknych chwil z logiką

Początek XX wieku to okres szukania podstaw wiedzy matematycznej. Wśród wielu powstających wówczas koncepcji, na czym oprzeć matematykę (np. na teorii mnogości), pojawił się również pogląd zwany *intuicjonizmem*, by wiedza matematyczna była całkowicie zgodna z naszą intuicją. Przedstawiciele intuicjonizmu postulowali stosowanie w nauce jedynie pojęć, które dane są nam empirycznie, a zatem takich, co do których możemy mieć pewne intuicje. Ich sprzeciw budziły więc między innymi: pojęcie *aktualnej nieskończoności* oraz *dowody niekonstruktywne*.

Z rozważanych możliwości ma miejsce druga: liczba $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ nie jest wymierna ani nawet algebraiczna (czyli nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach wymiernych). Wynika to z twierdzenia udowodnionego w 1934 roku przez Aleksandra Gelfonda i – niezależnie – rok później przez Theodora Schneidera:

jeśli a i b są liczbami algebraicznymi i b jest niewymierna, to a^b nie jest algebraiczna.

Jest to wynik badań nad pewną hipotezą Eulera – informacji o niej (i pokrewnych zagadnieniach) najlepiej poszukać pod hasłem: VII problem Hilberta.

Standardowym przykładem niekonstruktywnego rozumowania jest przedstawiony poniżej dowód następującego faktu: istnieją dwie liczby niewymierne a i b o tej własności, że a^b jest liczbą wymierną. Mówimy mianowicie: jeśli $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną, to właśnie znaleźliśmy $a = b = \sqrt{2}$ spełniające tezę. Załóżmy więc, że liczba $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną, i przyjmijmy: $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ oraz $b = \sqrt{2}$. Wówczas

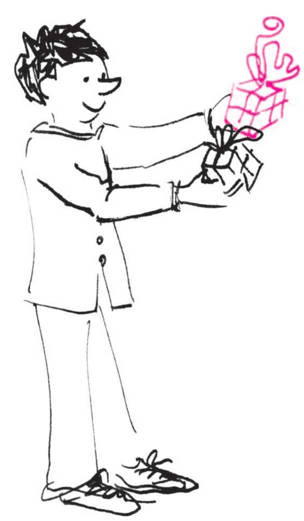
$$a^b = ((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2,$$

a zatem i w tym przypadku znaleźliśmy szukane liczby.

Zauważmy jednak, że powyższe rozumowanie nie daje nam informacji, jakie to liczby – nie wiemy, który z przypadków zachodzi.

Intuicjonista, nie akceptując tego typu rozumowań, odnajduje źródło problemu w klasycznej (tj. dwuwartościowej) logice. Konsekwentny intuicjonista musi odrzucić logikę w jej klasycznym kształcie, ponieważ okazuje się ona nieadekwatnym narzędziem do opisu dowodów konstruktywnych. Potrzebuje on zatem nowej logiki – logiki prawidłowych intuicjonistycznie rozumowań.

Poniżej przedstawimy trochę inne spojrzenie na rachunek zdań. Modyfikując znaczenie występujących w nim spójników, tj. nadając im nową interpretację, otrzymamy nowy język – bardziej odpowiedni do opisu rozumowań intuicjonistycznych. Jako pierwotne przyjmiemy pojęcie *konstrukcji*. Możemy patrzeć na konstrukcje jak na sposoby budowania nowych obiektów. Spróbujmy prześledzić, jak spójniki próbowali interpretować pierwsi intuicjoniści – Brouwer, Heyting i Kołmogorow. Oto te interpretacje.



Konstrukcja *koniunkcji* $p \wedge q$ to para składająca się z konstrukcji p i konstrukcji q.

Konstrukcja *alternatywy* $p \vee q$ to para składająca się z konstrukcji p lub konstrukcji q oraz informacji, która część alternatywy została skonstruowana.

Konstrukcja *implikacji* $p \Rightarrow q$ to metoda, która każdą konstrukcję p zamienia na konstrukcję q.

Niech $\perp$ oznacza dowolne zdanie fałszywe. Wówczas konstrukcja $\perp$ nie istnieje.

Zauważmy, że pozostałe znane nam spójniki można łatwo otrzymać z już zdefiniowanych. Mianowicie, dla *negacji* przyjmujemy: $\neg p = p \Rightarrow \perp$, dla *równoważności* zaś: $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Co ciekawe (i zamierzone), przy takim spojrzeniu wiele twierdzeń, które znamy z logiki klasycznej, przestaje być twierdzeniami. Dla przykładu: *prawo wyłączonego środka* $p \vee \neg p$ nie jest twierdzeniem logiki intuicjonistycznej. Zwróćmy uwagę, że konstrukcja alternatywy to para, która oprócz konstrukcji jednego ze zdań p, $\neg p$ zawiera również informację, która konstrukcja

*Instytut Filozofii, Uniwersytet Warszawski
**student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

została podana. Nie wiedząc nic więcej o p, nie jesteśmy w stanie podać tej informacji.

Podobnie rzecz ma się z *prawem podwójnego przeczenia* $p\Leftrightarrow\neg\neg p$. Chcąc podać konstrukcję dla takiej formuły, musimy w szczególności podać konstrukcję dla $\neg\neg p\Rightarrow p$, czyli sposób, w jaki z dowolnej konstrukcji $(p\Rightarrow\perp)\Rightarrow\perp$ wyprowadzać konstrukcję p. Jednak z konstrukcji $(p\Rightarrow\perp)\Rightarrow\perp$ nie ma możliwości uzyskania konstrukcji p, ponieważ w żadnym z następników nie występuje p. Przeciwna implikacja: $p\Rightarrow\neg\neg p$ jest natomiast poprawna. Spróbujmy ją udowodnić: dowolną konstrukcję p mamy zamienić na konstrukcję $\neg\neg p$. Mamy zatem następującą sytuację:

Dane konstrukcje:	Szukana konstrukcja:
p	$(p\Rightarrow\perp)\Rightarrow\perp$

Aby udowodnić implikację, musimy podać metodę, która każdą konstrukcję $p\Rightarrow\perp$ zamienia na konstrukcję $\perp$. Weźmy więc konstrukcję $p\Rightarrow\perp$:

Dane konstrukcje:	Szukana konstrukcja:
p	
$p\Rightarrow\perp$	$\perp$

Stosujemy więc metodę $p\Rightarrow\perp$ do konstrukcji p, otrzymując konstrukcję $\perp$, co kończy dowód.

Choć zdanie $p\Leftrightarrow\neg\neg p$ nie jest twierdzeniem logiki intuicjonistycznej, to zdanie $\neg p\Leftrightarrow\neg\neg\neg p$ już tak. Aby udowodnić równoważność, należy udowodnić implikacje w obie strony. Implikacja $\neg p\Rightarrow\neg\neg\neg p$ jest poprawna, ponieważ przyjmując $q=\neg p$, dostajemy $q\Rightarrow\neg\neg q$, co udowodniliśmy w poprzednim akapicie. Udowodnimy teraz $\neg\neg\neg p\Rightarrow\neg p$.

Dane konstrukcje:	Szukana konstrukcja:
$((p\Rightarrow\perp)\Rightarrow\perp)\Rightarrow\perp$	$p\Rightarrow\perp$

Korzystamy z definicji konstrukcji implikacji:

Dane konstrukcje:	Szukana konstrukcja:
$((p\Rightarrow\perp)\Rightarrow\perp)\Rightarrow\perp$	
p	$\perp$

Mając $((p\Rightarrow\perp)\Rightarrow\perp)\Rightarrow\perp$, do otrzymania konstrukcji $\perp$ wystarczy znaleźć konstrukcję $(p\Rightarrow\perp)\Rightarrow\perp$:

Dane konstrukcje:	Szukana konstrukcja:
$((p\Rightarrow\perp)\Rightarrow\perp)\Rightarrow\perp$	
p	$(p\Rightarrow\perp)\Rightarrow\perp$

Korzystając ponownie z definicji implikacji, otrzymujemy:

Dane konstrukcje:	Szukana konstrukcja:
$((p\Rightarrow\perp)\Rightarrow\perp)\Rightarrow\perp$	
p	
$p\Rightarrow\perp$	$\perp$

Ale teraz wystarczy zastosować metodę $p\Rightarrow\perp$ do p, ponieważ obie te konstrukcje mamy dane. Dowód został zakończony.

Ktoś mógłby zapytać, dlaczego tak dziwna logika przetrwała do naszych czasów. Miarą logiki, jak każdej teorii matematycznej, jest jej zastosowanie do opisu pewnej rzeczywistości. Okazuje się mianowicie, że istnieje ścisła odpowiedniość między dowodami w naszkicowanym powyżej rachunku zdań a programami komputerowymi pisanymi w dowolnym języku funkcyjnym (ściślej: termami λ-rachunku). Dowolny term λ-rachunku odpowiada dowodowi pewnej formuły w logice intuicjonistycznej, każdy zaś dowód ma swój odpowiednik wśród λ-termów. Powyższa odpowiedniość znana jest jako *izomorfizm Curry'ego–Howarda*, ale to już temat na inną opowieść.

Oczywiście, istnieje konstruktywny dowód twierdzenia

istnieją takie liczby a i b, które nie są wymierne, a liczba a^b jest wymierna,

czyli można je wskazać. To $\sqrt{2}$ i $\log_2 9$, mamy bowiem

$$\sqrt{2}^{\log_2 9}=\sqrt{2}^{2\log_2 3}=2^{\log_2 3}=3.$$

Należy jeszcze wykazać, że liczby te nie są wymierne. Skorzystamy w tym celu z twierdzenia o jednoznacznym rozkładzie liczby naturalnej na liczby pierwsze.

Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich p i q jest $p^2\neq 2q^2$, bo w rozkładzie na liczby pierwsze po lewej stronie jest parzysta liczba dwójek, a po prawej nieparzysta. Stąd

$$\frac{p^2}{q^2}\neq 2 \quad \text{i} \quad \frac{p}{q}\neq\sqrt{2}.$$

Podobnie, dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich p i q jest $2^p\neq 3^{2q}$, bo prawa strona jest nieparzysta. Zatem

$$p\neq\log_2 3^{2q}=\log_2 9^q=q\log_2 9$$

oraz

$$\frac{p}{q}\neq\log_2 9.$$