Zobaczyć chaos: czar obliczeń dwójkowych

Jarosław GÓRNICKI[*]

Słowo *chaos* sprawia nam kłopot, intuicyjnie je rozumiemy, ale gubimy się, gdy mamy wyjaśnić jego precyzyjne znaczenie. Początki matematycznego badania zjawisk chaotycznych sięgają lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku, choć można ich również upatrywać w pracach Henri Poincarégo z końca XIX wieku. Od tego czasu nadal aktualne są pytania: jak sprawdzić, czy to, co wydaje nam się zjawiskiem chaotycznym, rzeczywiście takim jest, a nie – chociaż bardzo skomplikowanym – jednak dającym się przewidywać? Jakie cechy uznać za charakterystyczne dla chaosu? Na ile ufać obliczeniom numerycznym, gdy podejrzewamy chaotyczne zachowanie badanego zjawiska? Jak odróżnić chaos od szumu (zjawiska losowego)?

Nie wiem, jak precyzyjnie odpowiedzieć na te pytania, sygnalizuję jednak problemy, z jakimi musimy się zmierzyć. Proponuję przypatrzeć się najprostszym jednowymiarowym modelom matematycznym przemieszczania się punktów w odcinku jednostkowym $[0,1]$. Wydaje się, że modele te kryją w sobie istotę tego, co możemy nazwać *chaosem* (zachowaniem chaotycznym).

W tym artykule przedstawimy dwa proste przekształcenia – nieciągłe przekształcenie piłokształtne P oraz ciągłe przekształcenie namiotowe T. Korzystając z dobrodziejstwa łatwych rachunków w systemie dwójkowym, uwypuklimy ich podobieństwa. Jednocześnie zwracamy uwagę na jeszcze jedno (niekomputerowe!) zastosowanie dwójkowego systemu liczenia, które w tym przypadku przebija system dziesiętny.

System binarny (dwójkowy). Każdą liczbę rzeczywistą $x \in [0,1)$ możemy przedstawić w postaci reprezentacji binarnej $x = (0{,}a_1a_2a_3\ldots)_2$, gdzie $a_k \in \{0,1\}$ i $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$. W takim zapisie binarnym liczba 1 ma przedstawienie $1 = 1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + \ldots = (1{,}0)_2$ lub jako $1 = 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + \ldots = (0{,}\overline{1})_2$ (kreska nad grupą cyfr oznacza jej cykliczne powtarzanie). Podobnie $\frac{1}{2} = (0{,}1)_2 = (0{,}0\overline{1})_2$. Aby przedstawienie było jednoznaczne, przyjmujemy umowę, że dopuszczalna reprezentacja binarna liczby x nie może kończyć się nieskończonym ciągiem jedynek.

Gdy chcemy przedstawić liczbę $x \in [0,1)$ w postaci binarnej, możemy wykorzystać następujące postępowanie:

1. napisz „0,”,
2. jeśli $2x < 1$, to dopisz cyfrę 0, a w przeciwnym przypadku dopisz cyfrę 1,
3. $x := 2x - a$, gdzie a jest wartością dopisanej cyfry, i przejdź do punktu 2.

Procedura zakończy się, gdy $x = 0$ lub z chwilą, gdy powtórzy się już raz otrzymana wartość x. Wtedy wypisany ciąg cyfr między powtórzeniami występuje cyklicznie.

Mamy więc

$$\frac{1}{10} = (0{,}0\overline{0011})_2, \quad 0{,}15 = (0{,}00\overline{1001})_2, \quad 0{,}625 = (0{,}101)_2, \quad \frac{5}{7} = (0{,}\overline{101})_2.$$

Liczby niewymierne mają nieskończone reprezentacje binarne nieokresowe, np.

$$\frac{1}{\pi} = (0{,}0101000101111100110000011011011\ldots)_2.$$

Przesunięcie Bernoulliego i piła. *Przesunięcie Bernoulliego* określamy na binarnych reprezentacjach liczb rzeczywistych $x \in [0,1]$ w następujący sposób: z zapisu binarnego liczby $x \in [0,1)$ usuwamy pierwszą cyfrę występującą po przecinku,

$$(0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots)_2 \to (0{,}a_2a_3a_4\ldots)_2,$$

liczbę 1 przekształcamy na nią samą. Mamy więc określone przekształcenie $B : [0,1] \to [0,1]$ wzorem

$$B((0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots)_2) = (0{,}a_2a_3a_4\ldots)_2, \qquad B(1) = 1.$$

[*] Katedra Matematyki,
Politechnika Rzeszowska

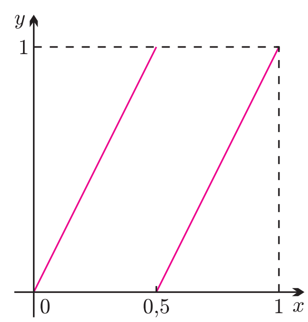
Rozważmy nieciągłe *przekształcenie piłokształtne* („piłę”) $P : [0,1] \to [0,1]$ (rys. 1) dane wzorem

$$P(x) = \begin{cases} 2x & \text{gdy } 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1 & \text{gdy } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

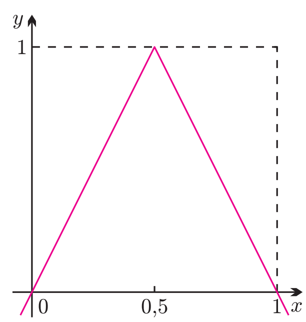
Zauważmy, że mnożenie przez 2 w systemie binarnym oznacza przesunięcie wszystkich cyfr o jedno miejsce w lewo, czyli przejście od $(0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots)_2$ do $(a_1{,}a_2a_3a_4\ldots)_2$. Ponadto, $a_1 = 0$ dla $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ oraz $a_1 = 1$ dla $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Wykonując rachunki podyktowane określeniem przekształcenia piłokształtnego P, widzimy, że operacja P polega na przesunięciu wszystkich cyfr reprezentacji binarnej liczby $x \in [0,1)$ o jedno miejsce w lewo, i dodatkowo, gdy $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, na usunięciu cyfry, która stoi bezpośrednio przed przecinkiem:

$$x = (0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots)_2 \to P(x) = (0{,}a_2a_3a_4\ldots)_2 = B(x) \quad \text{gdy } x \in [0,1),$$
$$P(1) = 1 = B(1).$$

Zatem przekształcenie piłokształtne jest identyczne z przesunięciem Bernoulliego!



Rys. 1



Rys. 2

Piła i przekształcenie namiotowe. Rozważmy teraz przekształcenie ciągłe kawałkami liniowe $T : [0,1] \to [0,1]$ dane wzorem

$$T(x) = 1 - |1 - 2x| = \begin{cases} 2x & \text{gdy } 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x & \text{gdy } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Ze względu na kształt wykresu przekształcenia T (rys. 2) nazywamy je *przekształceniem namiotowym.*

Trajektorią (orbitą) punktu x względem dowolnego przekształcenia S nazywamy zbiór

$$\{x, S(x), S(S(x)), S(S(S(x))), \ldots\} = \{S^n(x) : n = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Aby zbadać zachowanie się trajektorii przekształcenia T, wykorzystamy pewną własność przekształcenia T^n dla $n \geqslant 1$. Z pomocą przychodzi nam przekształcenie piłokształtne (a z nim przesunięcie Bernoulliego). Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że

$$T(T(x)) = (T \circ T)(x) = (T \circ P)(x) = T(P(x)), \qquad x \in [0,1].$$

Rzeczywiście,

$$\text{dla } x \in \left[0, \tfrac{1}{4}\right],\ T(T(x)) = T(2x) = 4x = T(P(x)),$$
$$\text{dla } x \in \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right],\ T(T(x)) = T(2x) = -4x + 2 = T(P(x)),$$
$$\text{dla } x \in \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right],\ T(T(x)) = T(-2x + 2) = 4x - 2 = T(2x - 1) = T(P(x)),$$
$$\text{dla } x \in \left(\tfrac{3}{4}, 1\right],\ T(T(x)) = T(-2x + 2) = -4x + 4 = T(2x - 1) = T(P(x)).$$

Stąd

$$T^n = T \circ P^{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

co w łatwy sposób możemy uzasadnić indukcyjnie.

Powyższa własność wiąże oba modele przekształcania odcinka $[0,1]$ w siebie w tym sensie, że $n - 1$ przekształceń P, po których następuje jedno przekształcenie T, daje ten sam wynik, co przekształcenie namiotowe zastosowane n razy!

Rozwiązanie zadania F 755.
Można przyjąć, że ilość moli powietrza wewnątrz baniek nie zmienia się: $n_3 = n_1 + n_2$.

Z drugiej strony, z równania stanu mamy $n = pV/RT$, gdzie $V = (4/3)\pi r^3$. Równowaga zachodzi, gdy $p = p_0 + 2\sigma/r$, gdzie p_0 to ciśnienie atmosferyczne, a $2\sigma/r$ to dodatkowe ciśnienie pod sferyczną powierzchnią błony mydlanej o napięciu powierzchniowym σ i promieniu r. Wstawiając wyrażenia na n_1, n_2 i n_3 do pierwszego równania, otrzymujemy:

$$p_0 = \frac{2\sigma(r_1^2 + r_2^2 - r_3^2)}{r_3^3 - r_1^3 - r_2^3}.$$

Żeby p_0 było dodatnie, licznik i mianownik muszą być dodatnie (bo ujemne jednocześnie być nie mogą). Dodatniość mianownika oznacza, że objętość kuli r_3 musi być większa od sumy objętości kul r_1 i r_2, a dodatniość licznika oznacza, że powierzchnia kuli r_3 musi być nie większa od sumy powierzchni kul r_1 i r_2.

Powiedzmy jeszcze, jaka jest reprezentacja binarna przekształcenia namiotowego. Dla $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ przekształcenie namiotowe pokrywa się z przekształceniem piłokształtnym, więc

$$T((0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots)_2) = (0{,}a_2 a_3 a_4 \ldots)_2.$$

Jeśli $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, to $P(x) = 2x - 1$, więc

$$T(x) = -2x + 2 = 1 - (2x - 1) = 1 - P(x) = 1 - (0{,}a_2 a_3 a_4 \ldots)_2.$$

Ponadto, $T(1) = 0$. Wprowadzając operację sprzężenia dla cyfr binarnych

$$a_i^* = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } a_i = 1, \\ 1 & \text{jeśli } a_i = 0, \end{cases}$$

otrzymujemy dla $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$$T((0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots)_2) = (0{,}a_2^* a_3^* a_4^* \ldots)_2,$$

bowiem

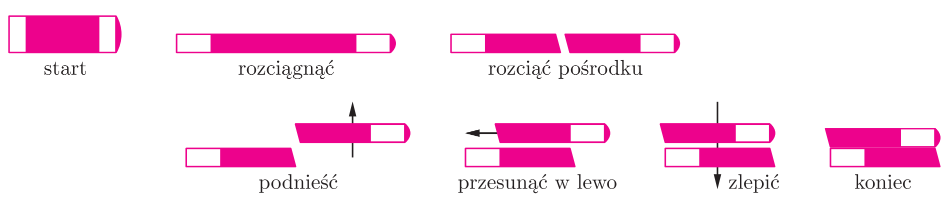
$$(0{,}a_2 a_3 a_4 \ldots)_2 + (0{,}a_2^* a_3^* a_4^* \ldots)_2 = (0{,}\overline{1})_2 = 1.$$

Dla $x = \frac{1}{2} = (0,1)_2$ przyjmujemy $T\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Mamy więc reprezentację binarną przekształcenia namiotowego dla $x \in [0, 1)$:

$$T((0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots)_2) = \begin{cases} (0{,}a_2 a_3 a_4 \ldots)_2 & \text{dla } 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{dla } x = \frac{1}{2}, \\ (0{,}a_2^* a_3^* a_4^* \ldots)_2 & \text{dla } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

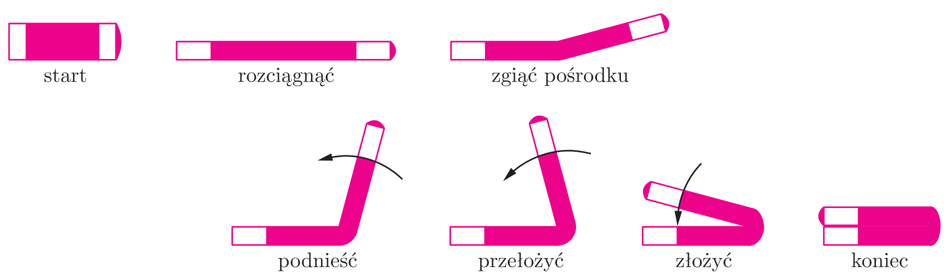
Interpretacja (graficzna) działania P oraz T. Zastanówmy się, co robią przekształcenia P i T z punktami z odcinka $[0, 1]$ w sensie geometrycznym.

Przekształcenie P rozciąga odcinek $[0, 1]$ jednorodnie do podwojenia jego długości, rozcina go w połowie i nakłada rozcięte odcinki jeden na drugi.



Rys. 3

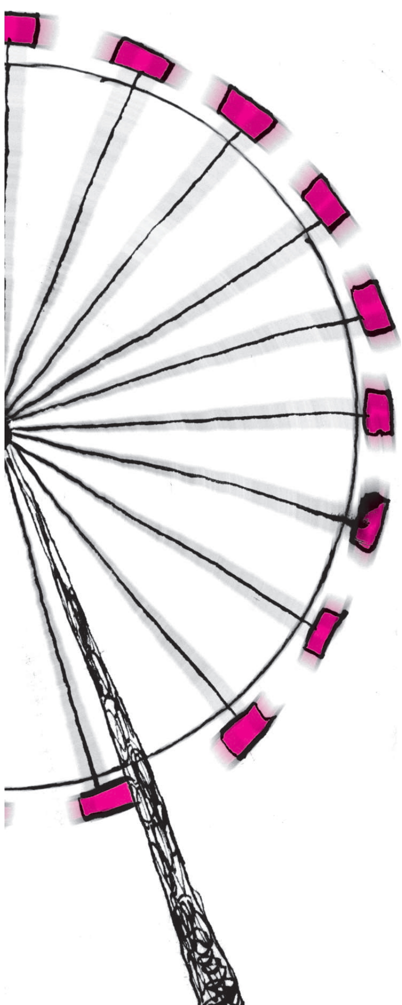
Przekształcenie T rozciąga odcinek $[0, 1]$ jednorodnie do podwojenia jego długości, potem składa go na pół i nakłada połówki (ale bez rozrywania).



Rys. 4

Przy wielokrotnym zastosowaniu przekształcenia P lub T punkty z odcinka $(0, 1)$ „wędrują” w nim w trudny do przewidzenia sposób – mówimy, że poruszają się chaotycznie. Przypomina to wałkowanie ciasta francuskiego – sposób ten zapewnia, że szczypta przypraw dodanych do ciasta będzie rozprowadzona w nim równomiernie.

W drugiej części artykułu (*Delta* 3/2010) powiemy, jakie własności charakteryzują chaos (jak dzisiaj nam się wydaje) oraz sprawdzimy, że według tej definicji przekształcenia P i T generują chaotyczne przemieszczanie się punktów w odcinku $(0, 1)$.



Rozwiązanie zadania M 1266. Przyjmijmy, że

$$a_i = 1 + i \cdot 100! \quad \text{dla } i = 0, 1, 2, \ldots, 99.$$

Wówczas jeśli d jest wspólnym dzielnikiem pierwszym liczb a_k i a_l, to liczba

$$a_k - a_l = 100!(k - l)$$

jest także podzielna przez d. Skoro d jest liczbą pierwszą, to $d \leqslant 97$. Jednak wtedy żadna z liczb a_k, a_l nie jest podzielna przez d. Wobec tego każde dwa wyrazy rozpatrywanego ciągu są względnie pierwsze.