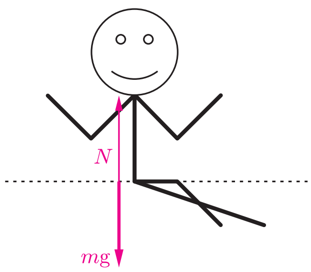
W lunaparku

Krzysztof TURZYŃSKI

Badania terenowe przeprowadzone zostały wraz z prof. Thomasem Flacke i dr Dominiką Konikowską w parku rozrywki Cedar Point w stanie Ohio, USA; towarzyszom badań autor niniejszym serdecznie dziękuje.

Amatorzy wrażeń moszczą się w siedzeniach wagonika. Obsługa życzy niezapomnianych przeżyć. Za chwilę rozpocznie się jazda kolejką górską, zwaną też często z angielska *roller coasterem*.

Na dobrą sprawę fizyka tych urządzeń jest niezwykle prosta jak na wynalazki, które ściągają do parków rozrywki na całym świecie miliony turystów. Po pierwsze, na podróżującego kolejką górską pasażera o masie m działa siła grawitacji o wartości mg skierowana pionowo w dół. Po drugie, pasażer ów, siedząc w fotelu wagonika, naciska na fotel. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona na pasażera działa więc również siła reakcji, jaką fotel wywiera na siedzenie tegoż osobnika – siła ta jest zawsze prostopadła do toru ruchu wagonika. I to już wszystko! (Niekiedy trzeba jeszcze uwzględnić siłę reakcji oparcia fotela, działającą prostopadle do oparcia na plecy pasażera, ale bez wyraźnej konieczności nie będziemy komplikować prowadzonych tu rozważań.) W opisanej powyżej sytuacji oczekiwania na przejażdżkę bilans sił jest bardzo prosty – siła reakcji równoważy siłę grawitacji i, zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki Newtona, pasażer kolejki może spoczywać.

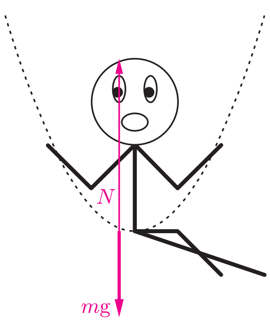


Rys. 1

Niczym w wierszu Tuwima, wagonik rusza z żółwią ociężałością, wciągany powoli na szczyt pierwszego wzniesienia stalowym łańcuchem. Pasażerowie kolejki rozglądają się wokół z rosnącym napięciem, widząc, jak tłum oczekujących na jazdę ludzi, bezlik zaparkowanych samochodów, a nawet budynki parku rozrywki maleją w oddali. Osiągnąwszy szczyt pierwszego wzniesienia, wagoniki ruszają na łeb na szyję w dół. Przeraźliwy wrzask pasażerów wwierca się w uszy.

Kolejki górskie opisanego tutaj typu zamieniają energię potencjalną pola grawitacyjnego Ziemi, wyrażającą się wzorem $E_P = mgh$, gdzie h jest wysokością nad ustalonym poziomem, na energię kinetyczną ruchu postępowego, $E_K = mv^2/2$, gdzie v jest prędkością ruchu. Największe kolejki osiągają wysokość 100 m, co oznacza, że rozpędzony wagonik zjeżdżający z pierwszego wzniesienia ma prędkość przekraczającą 150 km/h. Jeśli dodać do tego, że zjazd odbywa się często po zboczu nachylonym o 80 stopni do poziomu, wrażenia muszą być na tyle silne, by wydobyć krzyk z gardzieli największych twardzieli.

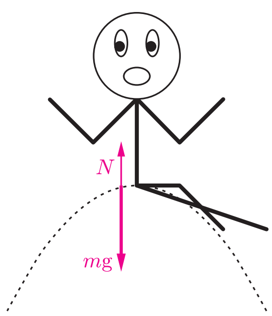
Wrzask pasażerów kolejki nie ustaje w momencie powrotu do wyjściowego poziomu. Podróżujący doznają niezwykłego i trochę przerażającego wrażenia – jakby ich ciała znienacka zaczęły ważyć znacznie więcej.



Rys. 2

Subiektywne odczucie ciężaru ciała nie jest bezpośrednio związane z siłą grawitacji. Pomyślmy o najprostszej sytuacji, kiedy stoimy na wadze, oddziałując na nią siłą grawitacji mg, a waga, zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona, odwzajemnia nam się siłą reakcji o tej samej wartości, ale skierowaną pionowo w górę. Tę siłę reakcji interpretujemy jako ciężar własnego ciała. W opisanym wyżej najprostszym przypadku siła reakcji jest równa co do wartości sile grawitacji, ale już kiedy zanurzymy się w wypełnionym wodą basenie, na nasze ciało zaczyna działać dodatkowo siła wyporu, w znacznym stopniu równoważąc siłę grawitacji. Naciskamy więc słabiej na dno basenu i siła reakcji dna basenu jest niewielka – dlatego w wodzie czujemy się tak lekcy. Wróćmy jednak na kolejkę górską. Jej kształt wokół „dołka" możemy przybliżać łukiem okręgu. Siła F_r potrzebna do spowodowania ruchu ciała o masie m i prędkości v po okręgu o promieniu r (siła dośrodkowa) ma wartość $F_r = mv^2/r$ i jest skierowana prostopadle do toru ruchu, w kierunku środka okręgu. Ta siła musi być wypadkową siły grawitacji i siły N reakcji fotela, otrzymujemy zatem $N - mg = mv^2/r$, skąd obliczamy $N = mg + mv^2/r$, a zatem siła reakcji jest większa od siły grawitacji. Rzeczywiście, mamy prawo czuć się ciężcy w najniższym punkcie ruchu wagonika. Jak bardzo? Przyjmując promień okręgu, jaki można dopasować do schematów dużych kolejek, równy 50 m, otrzymujemy siłę reakcji, a więc pozornie odczuwany ciężar równy pięciokrotności siły grawitacji, czyli w języku astronautyki i powieści science-fiction „przeciążenie 5g”. W rzeczywistości z powodu oporów ruchu przeciążenie na prawdziwej kolejce górskiej przez większość czasu jest mniejsze, ale i tak osiąga – przez ułamki sekund – wartości, przy których serce nie jest w stanie tłoczyć krwi do mózgu. Można by powiedzieć, że nie jest dziwne uruchamianie w tej sytuacji przez mózg silnych emocji. Warto zauważyć, że nawet zwykła podwórkowa huśtawka potrafi zapewnić doznania porównywalne z jazdą kolejką górską – kiedy huśtamy się, odchylając siodełko od pionu o kąt 90 stopni, analogiczny bilans sił i energii pokazuje, że przy zaniedbaniu oporów ruchu osiągamy przeciążenia 3g.

Rozpędzony wagonik osiąga szczyt drugiego, nieco niższego niż pierwsze, wzniesienia, czemu towarzyszy nowa erupcja pisków.

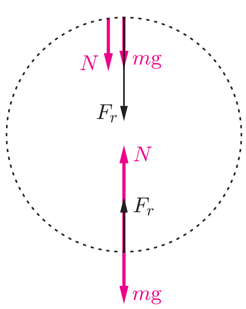


Rys. 3

Na szczytach wzniesień tor ruchu wagonika jest zakrzywiony w przeciwną stronę niż w „dołkach”. Przybliżając ponownie tor ruchu przez łuk okręgu, otrzymujemy bilans sił prowadzący do wniosku, że $N = mg - mv^2/r$, a zatem nasz odczuwany ciężar zmniejsza się. Znak minus pojawiający się w ostatnim wyrażeniu sugeruje możliwość uzyskania ujemnego wyniku – ale siła reakcji siedzenia fotela może w naszym układzie działać tylko w jedną stronę. Jeśliby pokonywać wzniesienie z na tyle dużą prędkością lub po na tyle małym promieniu, że wyrażenie na N stałoby się ujemne, odpowiadałoby to ujemnemu naciskowi siedzenia pasażera na fotel i pasażer ten zostałby wystrzelony w powietrze, chyba że dodatkowa uprząż utrzymałaby go w fotelu, wywierając dodatkową siłę reakcji. Przy prędkości 100 km/h maksymalny promień okręgu, dla którego nie zachodzi konieczność stosowania uprzęży, to niemal 80 m, czyli dość duży jak na mocno „zakręconą” trasę kolejki.

Po zjechaniu z drugiego wzniesienia wagonik wspina się na trzecie o charakterystycznym parabolicznym kształcie. Tym razem pisk pasażerów jest głośniejszy i trwa nieustannie przez dobre kilka sekund.

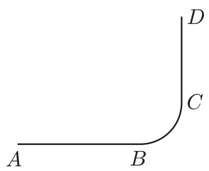
Atrakcją, jaką konstruktorzy kolejki górskiej zafundowali w tym miejscu pasażerom, jest tor odpowiadający trajektorii pocisku wystrzelonego w powietrze. Znajdujące się w polu grawitacyjnym ciało, którego początkowa prędkość ma składową poziomą oraz skierowaną w górę składową pionową, wykonuje ruch będący złożeniem dwóch prostych ruchów: jednostajnego prostoliniowego w kierunku poziomym i jednostajnie opóźnionego, a potem przyspieszonego, w kierunku pionowym. W ruchu takim wystrzelone ciało zakreśla właśnie parabolę. Poruszający się po takiej linii pasażerowie kolejki czują się, jakby fotele przestały oddziaływać na ich ciała, skoro i tak poruszają się oni, jakby żadnego podparcia w ogóle nie mieli – siła reakcji znika. Nic dziwnego, że temu fragmentowi toru towarzyszą tak silne emocje, nawet jeśli zanik siły reakcji nie jest na prawdziwych kolejkach górskich całkowity, bo maleje ona na parabolicznych odcinkach toru do mniej więcej 1/5 siły grawitacji.



Rys. 4

Wagonik zbliża się do kolejnej atrakcji. Przejeżdżając przez pętlę podróżujący znajdują się przez chwilę głowami w dół. Okrzyków przerażenia słychać jakby mniej, ale, w końcu, ileż można krzyczeć bez przerwy?

Na szczycie pętli o promieniu r siła dośrodkowa ma ten sam zwrot co siła grawitacji i siła reakcji fotela. Będąc sumą tych ostatnich dwóch, siła dośrodkowa musi być zatem większa od siły grawitacji, $mv^2/r > mg$. Obliczając całkowitą energię pasażera o masie m w granicznym przypadku równości tych sił, otrzymujemy minimalną całkowitą energię pasażera $E = mv^2/2 + 2mgr = \frac{5}{2}mgr$ (wysokość na szczycie pętli to $2r$). Przy zaniedbaniu strat energii jest to również energia tego samego pasażera na dole, tyle że poruszającego się z taką prędkością V, że $mV^2/2 = \frac{5}{2}mgr$. Oznacza to, że siła dośrodkowa na dole pętli wynosi $mV^2/r = 5mg$. Ponieważ wartość tej siły jest tam różnicą wartości siły reakcji i siły grawitacji, siła reakcji fotela



Rys. 5

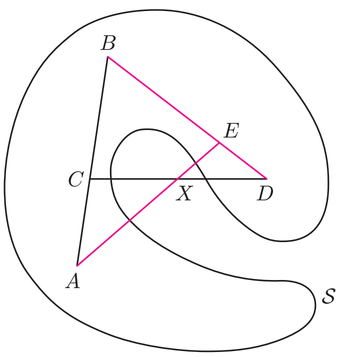
odpowiada w najniższym punkcie kołowej pętli przeciążeniu 6g. Takie przeciążenia potrafią, nie bez szkody dla zdrowia, znosić jedynie kosmonauci i piloci samolotów bojowych, potrafiący specjalnymi ćwiczeniami przeciwdziałać „ściąganiu” krwi w dolne partie ciała. Nic więc dziwnego, że pętle w prawdziwych kolejkach górskich nie mają kształtu kołowego, a raczej „łezkowaty”, taki, że promień okręgu przybliżającego tor ruchu jest bardzo duży u podstawy pętli i zmniejsza się ku jej wierzchołkowi, po czym znowu rośnie. W praktyce tor składa się ze sklejonych ze sobą dwóch spiral Eulera (zwanych też spiralami Cornu lub *klotoidami*). Odcinki klotoid występują także często w przebiegu torów kolejowych i tramwajowych z następującego powodu. Wyobraźmy sobie wagon poruszający się ze stałą prędkością najpierw po prostym odcinku AB, potem po odcinku okręgu BC, a następnie znowu po prostym odcinku CD. Między punktami A i B na wagon nie działają żadne siły, w punkcie B pojawia się znienacka i gwałtownie siła dośrodkowa, która równie nagle znika w punkcie C. Nagłe pojawienie się i zniknięcie siły dośrodkowej działającej na wagon będzie odczuwane przez pasażerów jako nagłe pojawienie się i zniknięcie siły bezwładności (odśrodkowej) działającej na ich ciała i rzucającej ich na boki wagonu. Nietrudno wyobrazić sobie, że stopniowe narastanie, a potem zanikanie siły zmieniającej kierunek wagonu spowoduje, iż podróż jego pasażerów będzie znacznie przyjemniejsza. Krzywizna klotoidy jest z definicji proporcjonalna do jej długości liczonej od ustalonego punktu.

Na szczycie pętli jednej z pań zsunął się z palca pierścionek. Odruchowo wyciągnęła rękę ku ziemi, aby uchwycić zgubę, tymczasem klejnot poszybował w stronę jej stóp, mimo że scena rozgrywała się do góry nogami.

Sprzeczne z intuicją? Za to całkowicie zgodne z bilansem sił. Na szczycie pętli na upuszczony pierścionek działa jedynie siła grawitacji, a na jego byłą właścicielkę suma skierowanych w tę samą stronę siły grawitacji i siły reakcji fotela (brak tej ostatniej oznaczałby, że owa pani wypadła z fotela), a zatem była właścicielka pierścionka porusza się w dół z tą samą co pierścionek zerową prędkością początkową, ale, na mocy drugiej zasady dynamiki Newtona, z większym przyspieszeniem. Innymi słowy, gdyby nie dodatkowa, skierowana w dół siła reakcji fotela, pierścionek i jego właścicielka lecieliby w dół z tą samą prędkością i przyspieszeniem, tak jak legendarne odważniki Galileusza na szczycie krzywej wieży w Pizie.

Tymczasem wagonik po wykonaniu jeszcze kilku efektownych ewolucji wraca do punktu wyjścia, gdzie elektromagnetyczne hamulce osadzają go w miejscu. Pasażerowie wysiadają – z błyszczącymi z emocji oczami, niektórzy na miękkich nogach. Chyba nikt nie myślał o zasadach dynamiki i bilansach sił.

Rozwiązanie zadania M 1265.
Przypuśćmy, że punkty $A, B \in \mathcal{S}$ są punktami widokowymi oraz niech C będzie punktem odcinka AB, który nie jest widokowy. Wówczas istnieje taki punkt $D \in \mathcal{S}$ oraz taki punkt X należący do odcinka CD, że $X \notin \mathcal{S}$.



Niech E będzie punktem przecięcia prostej AX i odcinka BD. Ponieważ punkt B jest widokowy, więc punkt E należy do zbioru $\mathcal{S}$. Z kolei punkt A jest widokowy, więc każdy punkt odcinka AE, w szczególności punkt X, należy do zbioru $\mathcal{S}$. Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że punkt C jest widokowy.

Konkurs zadań astronomicznych

Rozwiązania zadań z numeru 11/2009

A 21. Refrakcja według wzoru wynosi $4'$, zatem uwolniona od refrakcji wysokość dolnej krawędzi tarczy Słońca wynosi $h_0 = 13°24'$. W sytuacji z zadania zachodzi $\varphi = 90° - \delta + h_0 + r$, skąd $\varphi = 83°16'$.

A 22. Aktualna odległość gwiazdy to $r = 1/p = 1{,}835$ pc $= 5{,}5 \cdot 10^{13}$ km. Styczna do sfery niebieskiej składowa prędkości gwiazdy wynosi $v_t = 87{,}5$ km/s, wobec czego pełna prędkość wynosi $v = \sqrt{v_t^2 + v_r^2} = 140{,}5$ km/s. Trójkąt rozpięty na wektorach odpowiadających v_r i v jest podobny do trójkąta o wierzchołkach: Słońce, gwiazda i jej punkt przysłoneczny. Zachodzi więc $r_{\min}/r = v_t/v$, skąd $r_{\min} = 1{,}143$ pc. Droga, jaką musi przebyć gwiazda do punktu przysłonecznego, to $\sqrt{r^2 - r_{\min}^2} = 1{,}435$ pc, na co z prędkością v potrzeba w przybliżeniu 9730 lat.