Oszacowanie sumy długości przekątnych

Martha UBIK

Jest to skrót pracy uczniowskiej nagrodzonej srebrnym medalem w XXXI Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki w 2009 roku, Kraków.

W artykule Marka Kordosa *Szacujemy*, który został opublikowany w czasopiśmie *Matematyka – Społeczeństwo – Nauczanie* (41, lipiec 2008), przedstawione jest następujące oszacowanie dla czworokąta wypukłego:

$$\text{pół obwodu} < \text{suma przekątnych} < \text{obwód}.$$

Znajduje się tam również wskazówka dotycząca analogicznego szacowania w pięciokącie. Artykuł zakończony jest kilkoma pytaniami o możliwe uogólnienia tych wyników. Na te pytania starałam się w mojej pracy odpowiedzieć.

W dalszej części będę używać następujących oznaczeń:

- X – obwód rozpatrywanego wielokąta wypukłego;
- D – suma długości przekątnych tego wielokąta;
- n – liczba wierzchołków tego wielokąta (przyjmijmy, że $n > 3$).

W mojej pracy uzyskałam następujące nierówności:

1. dla n parzystego: $\dfrac{8}{n^2-8} < \dfrac{X}{D} < \dfrac{2}{n-3}$;
2. dla n nieparzystego: $\dfrac{8}{n^2-9} < \dfrac{X}{D} < \dfrac{2}{n-3}$.

Poniżej przedstawiam szkic dowodu dolnego oszacowania dla n nieparzystego.

Niech $n = 2k+1$ dla pewnej liczby naturalnej k. Oznaczmy wierzchołki wielokąta przez $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Dla każdej liczby całkowitej i z przedziału $[1, n]$ prawdziwe są następujące nierówności, które wynikają z nierówności trójkąta (indeksy przy wierzchołkach rozpatrywane są modulo n):

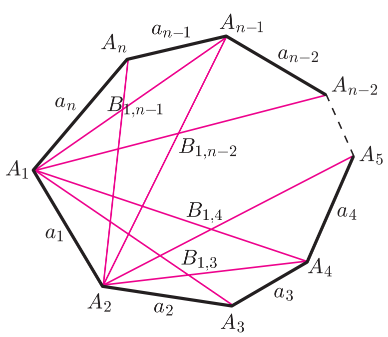
(1) $|A_iA_{i+2}| < |A_iA_{i+1}| + |A_{i+1}A_{i+2}|$,

(2) $|A_iA_{i+3}| < |A_iA_{i+1}| + |A_{i+1}A_{i+2}| + |A_{i+2}A_{i+3}|$,

(3) $|A_iA_{i+4}| < |A_iA_{i+1}| + |A_{i+1}A_{i+2}| + |A_{i+2}A_{i+3}| + |A_{i+3}A_{i+4}|$,

$$\vdots$$

(k) $|A_iA_{i+k}| < |A_iA_{i+1}| + |A_{i+1}A_{i+2}| + |A_{i+2}A_{i+3}| + \ldots + |A_{i+k-1}A_{i+k}|$.



Rys. 1. $|a_1| < |A_1B_{13}| + |A_2B_{13}|$,
$|a_3| < |A_3B_{13}| + |A_4B_{13}|$,
$|a_1| + |a_3| < |A_1A_3| + |A_2A_4|$.

W ten sposób dla każdego indeksu i wypisujemy oszacowania górne dla przekątnych o jednym wierzchołku w A_i, a drugim leżącym nie dalej niż o k wierzchołków od niego, licząc w kierunku odwrotnym do wskazówek zegara (zobacz rys. 1). Przykładowo, gdy $i = 1$, to po lewej stronie wystąpią wszystkie przekątne wychodzące z wierzchołka A_1, dla których indeks drugiego wierzchołka nie jest większy od $(k+1)$. Jeśli rozpatrzymy takie nierówności dla wszystkich wierzchołków, to oszacujemy wszystkie przekątne – każdą dokładnie raz.

Zauważmy, że każdy bok wielokąta występuje w nierówności typu (1) dwa razy, typu (2) – trzy razy, a ogólnie w nierówności typu (m) – $m+1$ razy. Dodając powyższe nierówności stronami, otrzymujemy zatem:

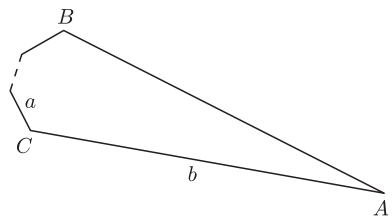
$$D < (2+3+4+\ldots+k)\cdot X = \frac{k(k+1)-2}{2}\cdot X = \frac{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}-2}{2}\cdot X = \frac{n^2-9}{8}\cdot X.$$

W podobny sposób można uzasadnić dolne oszacowanie w przypadku, gdy liczba boków wielokąta jest parzysta.

W przypadku wielokąta o liczbie boków $n = 2k$ należy uwzględnić, że przekątne, które łączą wierzchołki o numerach różniących się o k, występują w powyższych nierównościach dwukrotnie.

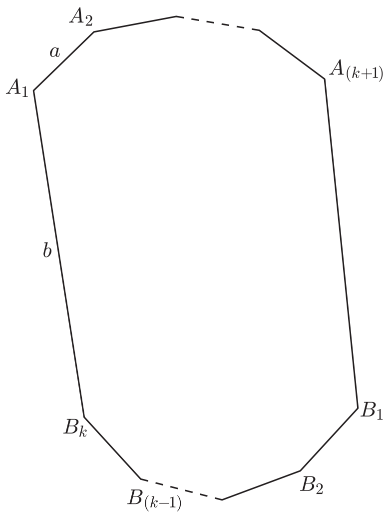
Aby wykazać prawdziwość górnego oszacowania, wystarczy zauważyć, że sumę długości każdej pary niesąsiadujących boków można oszacować z góry przez sumę długości łączących je przekątnych (rys. 1). Ponieważ każdy koniec każdej przekątnej ma punkt wspólny z dwoma bokami, a każdy koniec każdego boku ma punkt wspólny z $(n-3)$ przekątnymi, to, dodając stronami wszystkie takie nierówności, otrzymamy oczekiwane oszacowanie.

Okazuje się, że przedstawione powyżej nierówności są optymalne, tzn. dla każdego $n > 3$ istnieje wielokąt wypukły, dla którego wartość wyrażenia $\frac{X}{D}$ jest dowolnie bliska liczbie $\frac{2}{n-3}$ oraz wielokąt, dla którego ta wartość jest dowolnie bliska liczbie $\frac{8}{n^2-8}$ dla n parzystego, a $\frac{8}{n^2-9}$ dla n nieparzystego.



Rys. 2

Rozważmy najpierw wielokąt z rysunku 2. Zacznijmy od ustalenia punktów B i C. Chcielibyśmy, żeby w naszym wielokącie boki AB i AC miały długość b, a pozostałe boki (możemy narysować ich dowolnie dużo) – długość a. Taki wielokąt istnieje dla każdego $b > \frac{|BC|}{2}$. Wystarczy wykazać, że dla dostatecznie dużej wartości b stosunek $\frac{X}{D}$ przyjmie wartość dowolnie bliską liczbie $\frac{2}{n-3}$. To stwierdzenie na pewno wyda się intuicyjne, gdy przypomnimy sobie pomysł na dowód oszacowania górnego: wierzchołek A należy do 2 boków i $n-3$ przekątnych. Dokładne rachunki pominiemy.



Rys. 3

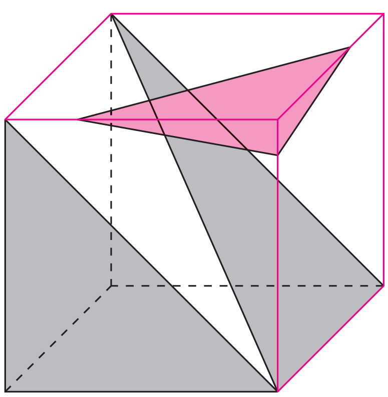
Natomiast w celu wykazania, że optymalne jest dolne oszacowanie w przypadku nieparzystokąta, można rozpatrzeć wielokąt z rysunku 3 o dwóch bokach A_1B_k i B_1A_{k+1} długości b i pozostałych bokach długości a.

Podobny problem można rozważyć w przypadku wielościanów. Nazwijmy *przekrojem trójkątnym* trójkąt, którego wszystkie wierzchołki należą do zbioru wierzchołków rozważanego wielościanu wypukłego. Przykładowo, pośród trójkątów zacieniowanych na rysunku 4, przekrojami trójkątnymi są szare, a nie jest takim przekrojem kolorowy. Niech w będzie liczbą wierzchołków wielościanu, T oznacza sumę pól wszystkich przekrojów trójkątnych danego wielościanu, a S pole powierzchni całkowitej tej bryły. Można oszacować wartość wyrażenia $\frac{T}{S}$.

Ja otrzymałam wynik:

$$\frac{\binom{w}{3}}{2} > \frac{T}{S} \geqslant \max\left(1, \frac{w}{12}\right).$$

Może Tobie, Czytelniku, uda się to oszacowanie poprawić?



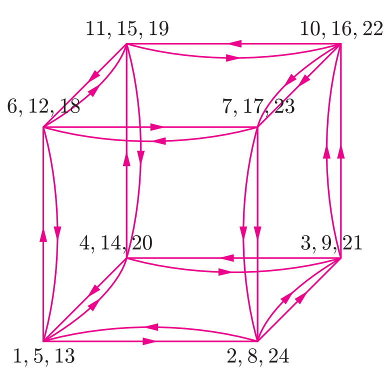
Rys. 4

Drugi problem „przestrzenny" dotyczy przekątnych wielościanu. Niech tym razem X oznacza sumę długości krawędzi danego wielościanu, a D sumę długości przekątnych wielościanu oraz przekątnych jego ścian. Niech ponadto k i w będą odpowiednio liczbą krawędzi oraz liczbą wierzchołków danego wielościanu ($w > 4$).

Oszacowanie górne wyrażenia $\frac{X}{D}$ ze względu na w nie jest możliwe, bo dla każdego $w > 3$ można skonstruować ostrosłup o dowolnie dużej odległości wierzchołka od płaszczyzny podstawy, a wraz z jej wzrostem zwiększa się wartość tego wyrażenia (jedynymi składnikami D są długości przekątnych podstawy, a one nie zmieniają się przy zmianie wysokości ostrosłupa; zwiększają się natomiast długości krawędzi bocznych). Zatem wartość wyrażenia $\frac{X}{D}$ nie jest ograniczona z góry.

Cykl Eulera to taki cykl w grafie, który przechodzi przez każdą jego krawędź dokładnie raz.

Można natomiast szacować z dołu. Jeśli podwoimy szkielet wielościanu, tzn. potraktujemy go jako graf i każdą krawędź zamienimy na dwie o tych samych wierzchołkach, to wówczas z każdego wierzchołka wielościanu będzie wychodzić parzysta liczba krawędzi, co jest warunkiem wystarczającym do istnienia cyklu Eulera w skonstruowanym w ten sposób grafie. Na rysunku 5 przedstawiony jest taki cykl dla sześcianu. Liczby przy wierzchołkach oznaczają kolejność odwiedzania w cyklu Eulera. Można dokonać podobnego szacowania jak w przypadku płaszczyzny, tzn. długość odcinka łączącego wierzchołek odwiedzany w cyklu Eulera jako i-ty z wierzchołkiem odwiedzanym w cyklu jako j-ty oszacować przez sumę długości odcinków łączących wierzchołek o numerze i z $(i+1)$, $(i+1)$ z $(i+2), \ldots,$ $(j-1)$ z j. Trzeba jednak uwzględnić, że nie każdy odcinek łączący wierzchołki o niekolejnych indeksach jest przekątną wielościanu lub przekątną jego ściany. Przykładowo, na rysunku 5 odcinek łączący piąty wierzchołek cyklu z wierzchołkiem dwunastym jest krawędzią, a odcinek łączący wierzchołek szósty z wierzchołkiem dwunastym jest zdegenerowany do punktu.



Rys. 5

Powyższą metodą otrzymałam nierówność:

$$(*) \qquad \frac{9}{2k^2 - 10k - 3w} < \frac{X}{D}.$$

Ponieważ $k \geqslant \frac{3}{2}w$, więc dla $k > 6$ mianownik lewej strony nierówności $(*)$ będzie dodatni. Dla $k = 6$ i $w = 4$ (dla czworościanu) mianownik ten zeruje się – czworościan nie ma przekątnych ani przekątnych ścian.

Pozostaje pytanie, czy powyższe oszacowanie jest optymalne. Wszystkich Czytelników zachęcam do próby znalezienia odpowiedzi, gdyż nie udało mi się ani znaleźć optymalnego przykładu, ani poprawić oszacowania. Opisany tu temat z pewnością nie jest wyczerpany, więc namawiam, by przyjrzeć mu się uważniej.