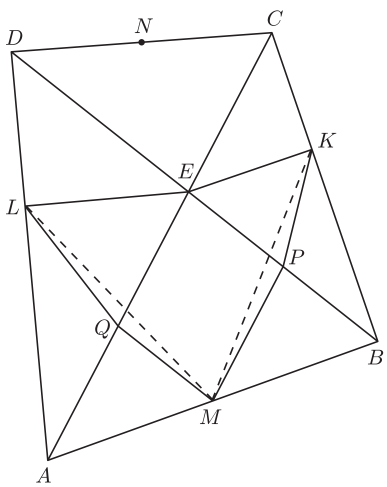
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2010

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 581 ($WT = 3{,}31$) i 582 ($WT = 1{,}28$) z numeru 5/2009

Janusz Olszewski	Warszawa	46,65
Jerzy Cisło	Wrocław	42,86
Marek Prauza	Poraj	42,39
Tomasz Warszawski	Kraków	42,26
Zbigniew Galias	Kraków	42,05
Tomasz Tkocz	Rybnik	38,43
Tomasz Wietecha	Tarnów	37,49

Oto hit absolutny: nowy rekord.
Pan Janusz Olszewski: 44 punkty po raz jedenasty!
Wielkie brawa!!!



Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 593, 594

Redaguje Marcin E. KUCZMA

593. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie:

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_3 = 2, \qquad a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2}+5}{a_n}.$$

Dowieść, że wszystkie jego wyrazy są liczbami całkowitymi.

594. Rozważamy funkcję

$$f(x) = \frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}.$$

Niech a będzie ustaloną liczbą rzeczywistą, różną od 0 i 1. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste x, spełniające równanie $f(x) = f(a)$.

Zadanie 594 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2009

Przypominamy treść zadań:

585. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi punktu przecięcia jego przekątnych na proste BC i DA. Punkty M i N są środkami boków AB i CD. Wykazać, że punkty K i L są symetryczne względem prostej MN.

586. Dowieść, że każdy dziewięcioelementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, \ldots, 99\}$ ma takie dwa rozłączne niepuste podzbiory A i B, że suma liczb w zbiorze A jest równa sumie liczb w zbiorze B.

585. Niech E będzie punktem przecięcia przekątnych. Czworokąt $ABCD$ ma okrąg opisany, więc trójkąty BEC i AED są podobne. Punkty K i L są spodkami wysokości w tych trójkątach (albo leżą oba na bokach BC i AD, jak na rysunku, albo oba na przedłużeniach tych boków).

Środki P i Q odcinków BE i AE łączymy odpowiednio z punktami K i L oraz z punktem M. Tworzą się podobne trójkąty równoramienne EPK i EQL oraz równoległobok $EPMQ$. Tak więc

$$|MP| = |QE| = |QL|, \qquad |MQ| = |PE| = |PK|$$

oraz

$$|\sphericalangle EPK| = |\sphericalangle EQL|, \qquad |\sphericalangle EPM| = |\sphericalangle EQM|.$$

Dodajemy stronami ostatnie dwie równości (w sytuacji jak na rysunku – przy innym położeniu punktów trzeba te równości odjąć) i otrzymujemy $|\sphericalangle KPM| = |\sphericalangle LQM|$. Z uzyskanych związków wynika przystawanie trójkątów MPK i LQM, więc i równość $|MK| = |ML|$.

Analogicznie stwierdzamy, że $|NK| = |NL|$. Zatem punkty M i N leżą na symetralnej odcinka KL.

586. Niech $\{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ będzie zadanym zbiorem liczb naturalnych, $1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_9 \leqslant 99$.

Będziemy rozważali tylko te jego podzbiory F, które spełniają warunki

$$3 \leqslant |F| \leqslant 6, \qquad |F \cap \{a_4, \ldots, a_9\}| \geqslant 2.$$

Liczba takich zbiorów wynosi

$$\sum_{\substack{3\leqslant k+l\leqslant 6\\ k\geqslant 2}} \binom{6}{k}\binom{3}{l} = \sum_{k=2}^{6}\binom{6}{k}\sum_{l=3-k}^{6-k}\binom{3}{l} = 395.$$

Suma liczb w każdym takim zbiorze F jest nie mniejsza niż b i nie większa niż c, gdzie

$$b = a_1 + a_4 + a_5, \qquad c = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9.$$

W przedziale $\langle b; c\rangle$ jest $c - b + 1 = d$ liczb naturalnych,

$$d = a_9 + a_8 + a_7 + a_6 - a_1 + 1 \leqslant 99 + 98 + 97 + 96 < 395.$$

Zatem pewne dwa różne takie zbiory mają jednakową sumę elementów. Jeżeli nie są rozłączne, odrzucamy ich część wspólną i dostajemy zbiory A i B, o jakie chodzi.

Klub 44

Zadania z fizyki nr 490, 491

Redaguje Jerzy B. BROJAN

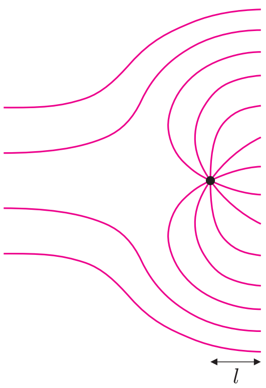
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2010

490. Fusy herbaciane są nieco cięższe od herbaty i opadają na dno. Gdy zamieszamy herbatę, powstaje siła odśrodkowa, która powoduje podwyższenie poziomu herbaty przy brzegu naczynia, tak jakby siła ciężkości była odchylona od pionu na zewnątrz (mówimy o „pozornej sile ciężkości”, będącej sumą siły ciężkości i siły odśrodkowej). Zatem rolę dna powinien pełnić raczej zewnętrzny brzeg denka szklanki, a nie jego środek. Dlaczego więc fusy zbierają się na środku denka?

491. Do strumienia czystej wody płynącej z prędkością $v_0 = 10$ cm/s wprowadzono końcówkę rurki, przez którą wypływa zabarwiona woda w tempie $A = 1000$ cm^3/s. Obliczyć średnicę d strumienia wody zabarwionej w odległości $l = 5$ cm za końcówką rurki (rys. 1), przy następujących założeniach:

1) woda wypływa z rurki izotropowo (jednakowo we wszystkich kierunkach),
2) przepływ jest stacjonarny (stały w czasie) i laminarny, tzn. nie występuje mieszanie.

Wskazówka. Dla pola przepływu cieczy obowiązuje zasada superpozycji (podobnie jak np. dla pola elektrycznego), zgodnie z którą w każdym punkcie wektor prędkości cieczy jest sumą stałego wektora $\vec{v}_0$ i radialnie skierowanego wektora o wartości zależnej od A i od odległości od rurki.



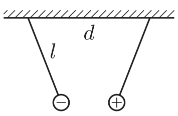
Rys. 1

Rozwiązania zadań z numeru 9/2009

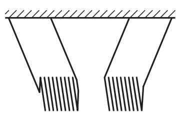
Przypominamy treść zadań:

482. Dwa małe ciała o jednakowych masach zawieszono na nitkach o długości l zaczepionych w odległości d od siebie (rys. 2). Ciała są naładowane przeciwnymi znakami. Jaki warunek muszą spełniać l i d, aby przy pewnych wartościach mas i ładunków mogły istnieć dwa różne położenia równowagi ciał? Jaki musi być ten warunek, aby mogły istnieć trzy różne położenia równowagi? Czy są to położenia równowagi trwałej, czy nietrwałej? Nie bierzemy pod uwagę sytuacji, w której ciała się stykają.

483. Dwie zwojnice zawieszono na przewodach. Po włączeniu zasilania prądem przemiennym przyciągnęły się (rys. 3). Gdy między nie wstawiono pionową płytę z pewnego materiału, zaczęły się odpychać. Na czym polega efekt? Jaki to był materiał?



Rys. 2



Rys. 3

482. Zauważmy najpierw, że w położeniu równowagi kąty odchylenia nici od pionu muszą być jednakowe. W przeciwnym przypadku dla ciała o większym kącie odchylenia większa byłaby też prostopadła do nici składowa siły ciężkości, natomiast siła oddziaływania elektrycznego działałaby nieco w dół, więc „mniej efektywnie” – jej składowa prostopadła do nici byłaby mniejsza niż dla drugiego ciała i warunki równowagi byłyby ze sobą sprzeczne. Dla jednakowych kątów α ciała są na jednakowej wysokości, siła oddziaływania elektrycznego F_e jest pozioma, a warunek równowagi sprowadza się do wzoru

$$F_e = F_g \operatorname{tg} \alpha,$$

gdzie F_g jest siłą ciężkości. Ponieważ F_e jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości ciał, równej $d - 2l \sin \alpha$, więc wprowadzając parametr $k = d/2l$, otrzymujemy równanie

$$(k - \sin \alpha)^2 \operatorname{tg} \alpha = A,$$

gdzie w wyrażeniu A zebrane zostały wszystkie pozostałe stałe (ładunki, masy itd.).

Należy więc zbadać przebieg funkcji $f(\alpha) = (k - \sin \alpha)^2 \operatorname{tg} \alpha$ dla kątów spełniających warunek $\sin \alpha < k$. Nietrudno przekonać się, że dla $k \leqslant 1$ w rozważanym przedziale funkcja ma jedno maksimum, a więc równanie $f(\alpha) = A$ ma dla odpowiednio małych A dwa rozwiązania – pierwsze w obszarze, gdzie f rośnie, a drugie, gdzie f maleje. Rosnąca funkcja f oznacza, że przy większym wychyleniu wzrost odpowiedniej składowej siły ciężkości (za co odpowiada czynnik $\operatorname{tg} \alpha$) przeważa nad spadkiem odległości ciał i wzrostem siły F_e, czyli w pierwszym przypadku równowaga jest trwała; analogicznie w drugim jest nietrwała. Dla $1 < k < \sqrt{2}$ funkcja (rozpatrywana teraz w przedziale od zera do 90°) najpierw rośnie, następnie maleje, a dalej znów rośnie, więc przy odpowiednio dobranej wartości A mamy trzy położenia równowagi (trwała, nietrwała, trwała), natomiast dla $k \geqslant \sqrt{2}$ funkcja monotonicznie rośnie i mamy jedno położenie równowagi trwałej.

Ścisłe wyprowadzenie granicznej wartości k wymaga dwukrotnego różniczkowania – najpierw przyrównania pochodnej $f'(\alpha)$ do zera, skąd wynika zależność $k(\alpha)$, a następnie wyznaczenia maksimum tej funkcji (rozwiązania równania $k'(\alpha) = 0$).

483. Płyta była wykonana z dobrego przewodnika (np. miedzi), a przyczyną odpychania były wzbudzane w niej prądy wirowe. O zwrocie siły oddziaływania prądów wirowych na zwojnicę decyduje reguła Lenza – prąd wirowy „sprzeciwia się” zmianom pola magnetycznego, czyli wytwarza pole przeciwnie skierowane (jakby na osi zwojnicy powstał magnes o przeciwnym ustawieniu biegunów).

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 480 ($WT = 1{,}36$) i 481 ($WT = 2{,}14$) z numeru 6/2009

Andrzej Idzik	Bolesławiec	45,76
Krzysztof Magiera	Łosiów	35,98
Michał Koźlik	Gliwice	25,50
Jerzy Witkowski	Radlin	16,54

Od 14 lat Pan Idzik występuje w szrankach naszego Klubu, a teraz zakończył dziewiątą rundę! Oznacza to wspaniałe tempo – co półtora roku pełne okrążenie. Ile rund jeszcze zaliczymy, Panie Andrzeju?