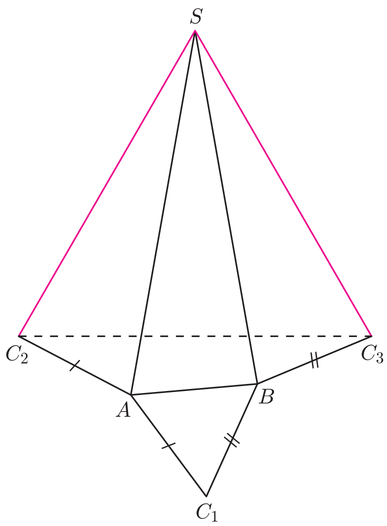
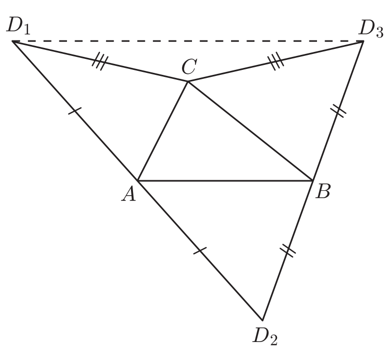
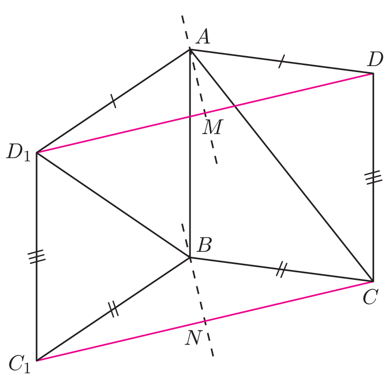
Kącik przestrzenny



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Zadania rozwiązywane w kolejnych odcinkach zwykle będą pochodzić z konkursów matematycznych z różnych krajów. Wyjaśnienia skrótów nazw znajdziecie na stronie Delty.

W tym odcinku, oprócz zadań z polskich konkursów, mamy zadanie z Olimpiady Matematycznej Czech i Słowacji.

Metoda siatek

Pierwszy kącik poświęcimy metodzie siatek przydatnej w rozwiązywaniu zadań przestrzennych. Powierzchnię wielościanu występującego w zadaniu można rozciąć i rozłożyć na płaszczyźnie. W ten sposób często uzyskamy zależności, których nie widać w przestrzeni. To podejście jest szczególnie skuteczne, gdy wszystkie obiekty rozpatrywane w zadaniu są położone na powierzchni wielościanu. Ale nawet jeśli występują jakieś inne elementy, to często przyglądając się siatce można uzyskać przydatne wnioski albo chociaż bardziej czytelny rysunek do zadania. Warto przy tym pamiętać, że siatkę możemy skonstruować także dla wielościanów zdegenerowanych – jeśli teza zadania dla przypadku zdegenerowanego jest nieprawdziwa, to znaczy, że niektóre siatki trzeba wykluczyć z rozważań.

Zajmiemy się tutaj jedynie takimi zadaniami, w których narysowanie siatki faktycznie wnosi coś nowego do rozwiązania.

1. (OMG 2-II-5) *Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$, w którym*
$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = \sphericalangle CSA = 20^\circ.$$
Wykazać, że obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od długości każdej krawędzi AS, BS, CS.

Rozwiązanie. Rozetnijmy powierzchnię ostrosłupa wzdłuż krawędzi AC, BC, SC i rozłóżmy ją na płaszczyźnie. W ten sposób uzyskujemy sześciokąt $AC_1BC_3SC_2$ będący siatką tego ostrosłupa (rys. 1). Ponieważ $SC_2 = SC_3$ oraz $\sphericalangle C_2SC_3 = \sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC + \sphericalangle CSA = 60^\circ$, więc trójkąt C_2C_3S jest równoboczny. Stąd
$$CA + AB + BC = C_2A + AB + BC_3 \geqslant C_2C_3 = CS.$$
Analogicznie dowodzimy, że obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od długości pozostałych krawędzi bocznych.

2. (CZS 1995) *W czworościanie $ABCD$ sumy kątów płaskich przy wierzchołkach A i B wynoszą po* 180°. *Wykazać, że $CD \geqslant AB$.*

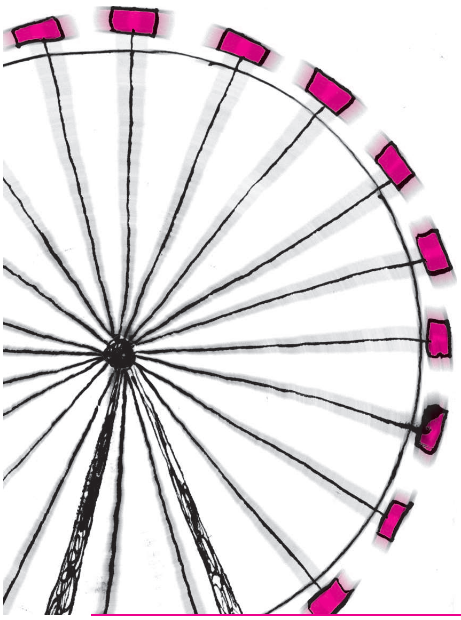
Rozwiązanie. Rozpatrzmy sześciokąt $D_1AD_2BD_3C$ będący siatką czworościanu $ABCD$ (rys. 2). Z treści zadania wynika, że punkty A i B leżą odpowiednio na odcinkach D_1D_2 i D_2D_3. Ponadto z równości $AD_1 = AD_2$ i $BD_2 = BD_3$ wynika, że $D_1D_3 = 2AB$. Korzystając z nierówności trójkąta D_1CD_3, otrzymujemy
$$2CD = CD_1 + CD_3 \geqslant D_1D_3 = 2AB.$$

3. (OM 47-III-4) *W czworościanie $ABCD$ zachodzą równości*
$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC.$$
Dowieść, że krawędzie AB i CD mają jednakową długość.

Rozwiązanie. Rozpatrzmy sześciokąt AD_1C_1BCD będący siatką czworościanu $ABCD$ (rys. 3). Przepisując równości dane w treści zadania jako
$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABD_1 = \sphericalangle BD_1C_1,$$
widzimy, że proste CD, AB i C_1D_1 są równoległe. Stąd i z równości $CD = C_1D_1$ wynika, że czworokąt CDD_1C_1 jest równoległobokiem. Biorąc pod uwagę M i N, środki odcinków DD_1 i CC_1, uzyskamy również równoległość prostych CD i MN, a więc też AB i MN. Ponieważ $AD = AD_1$ i $BC = BC_1$, to punkty A i B leżą na symetralnych odcinków DD_1 i CC_1. Skoro jednak odcinki CC_1 i DD_1 są równoległe, to ich symetralne również. To wraz z poprzednim spostrzeżeniem, że $AB \parallel MN$, oznacza, iż czworokąt $ABNM$ jest równoległobokiem. W takim razie $AB = MN = CD$ (uważny Czytelnik z pewnością dostrzeże, że z rozwiązania wynika także równość $AD = BC$).

Szczęśliwi oddajemy takie rozwiązanie zadania na olimpiadzie matematycznej, a potem ze zdziwieniem zauważamy, że obcięto nam punkty. Dlaczego?
No właśnie, po chwili zastanowienia dostrzegamy, że dowolny trapez spełnia założenia zadania, a nie musi spełniać tezy. Gdzieś więc milcząco skorzystaliśmy

z tego, że czworościan $ABCD$ jest niezdegenerowany. Po dokładniejszym przyjrzeniu się stwierdzamy, że dowód psuje się tylko w przypadku, gdy symetralne odcinków CC_1 i DD_1 pokryją się (punkty A, B, M, N leżą wtedy na jednej prostej i nie można stąd wywnioskować, że $ABNM$ jest równoległobokiem, choćby zdegenerowanym do odcinka). To ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BAC + \sphericalangle DAC$. Jednakże w dowolnym niezdegenerowanym czworościanie w każdym wierzchołku suma dwóch kątów płaskich jest większa od trzeciego, więc w przypadku niezdegenerowanym wspomniane proste nie mogą się pokryć. Na takie niespodzianki należy bardzo uważać, dlatego zawsze warto zastanowić się, co się dzieje w przypadku zdegenerowanym.



Zadania

4. (OM 51-III-4) *W ostrosłupie prawidłowym o wierzchołku S i podstawie $A_1A_2...A_n$ każda krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $60°$. Dla każdej liczby $n \geqslant 3$ rozstrzygnąć, czy można wybrać takie punkty $B_2, B_3, \ldots, B_n$, leżące odpowiednio na krawędziach $A_2S, A_3S, \ldots, A_nS$, że*

$$A_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + \ldots + B_{n-1}B_n + B_nA_1 < 2A_1S.$$

5. (UKR 1996) *W czworościanie $SABC$ zachodzą równości*

$$\sphericalangle SAC + \sphericalangle CAB = \sphericalangle SBA, \qquad \sphericalangle SAB + \sphericalangle CAB = \sphericalangle SCA, \qquad SB + SC = SA.$$

Wyznaczyć miarę kąta między dwusiecznymi kątów płaskich ASB i ASC tego czworościanu.

Więcej zadań na internetowej stronie *Delty*.

Michał KIEZA

Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1264. Ciąg $x_1, x_2, \ldots$ liczb całkowitych dodatnich jest określony rekurencyjnie w następujący sposób: liczba x_{n+1} powstaje z liczby x_n poprzez dodanie do niej wartości liczbowej pewnej niezerowej cyfry zapisu dziesiętnego liczby x_n. Rozstrzygnąć, czy tak określony ciąg $x_1, x_2, \ldots$ może składać się jedynie z liczb nieparzystych.
Rozwiązanie na str. 1

M 1265. Dany jest zbiór $\mathcal{S}$ na płaszczyźnie. Punkt $A \in \mathcal{S}$ nazwiemy punktem *widokowym* zbioru $\mathcal{S}$, jeśli dla każdego punktu $X \in \mathcal{S}$ odcinek AX należy do zbioru $\mathcal{S}$. Wykazać, że jeżeli punkty A i B są punktami widokowymi zbioru $\mathcal{S}$, to każdy punkt odcinka AB jest także punktem widokowym zbioru $\mathcal{S}$.
Rozwiązanie na str. 8

M 1266. Znaleźć 100-wyrazowy, niestały, ciąg arytmetyczny liczb całkowitych dodatnich, w którym każde dwa wyrazy są względnie pierwsze.
Rozwiązanie na str. 11

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 755. Dwie bańki mydlane o promieniach r_1 i r_2 zlewają się, tworząc jedną bańkę o promieniu r_3. Znając napięcie powierzchniowe σ, znaleźć ciśnienie atmosferyczne.
Rozwiązanie na str. 10

F 756. Woda w garnku jest podgrzewana za pomocą grzałki elektrycznej o mocy $P = 1000$ W. W ciągu dwóch minut temperatura wody wzrosła z $85°$C do $95°$C. Grzałka została wyłączona, a temperatura wody spadła w ciągu jednej minuty o jeden stopień. Ile wody znajdowało się w garnku? Ciepło właściwe wody wynosi $4{,}19 \cdot 10^3$ J/(kg $\cdot$ K).
Rozwiązanie na str. 24