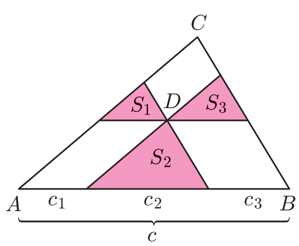
Czytelników, którzy nie czują się zbyt pewnie, używając operacji bitowych, zachęcamy do potrenowania na łamigłówkach bitowych z *Delty* 11/2008.

16 mniej i 16 bardziej znaczącym bitom (tutaj mamy dwa odwołania do tablicy). Można sprawdzić, że w każdym przypadku otrzymujemy rozwiązanie wykonujące mniej operacji od wyjściowego, siłowego $O(n^3)$.

W ten sposób zakończyliśmy opis ulepszonego algorytmu zliczania trójkątów w grafie. Nie sposób jednak oprzeć się wrażeniu, iż owo ulepszenie jest bardzo nieznaczne – na tyle nieznaczne, że nie jest pewne, czy warto było pisać o nim cały ten artykuł. Aby się przekonać o tym, że jednak może ono mieć sens, wystarczy się przyjrzeć temu, jak rozwija się współcześnie praktyczna strona informatyki. Otóż już w standardowych procesorach mamy do dyspozycji zmienne 64-bitowe (są one jednak mniej efektywne niż 32-bitowe – to fakt), ale coraz częściej pojawiają się już tzw. maszyny 64-bitowe i 128-bitowe (te ostatnie są jednak wciąż dosyć rzadkie). To oznacza także wzrost możliwej wartości parametru B, a przecież nasz algorytm (zakładając, dla uproszczenia, możliwość zliczenia zapalonych bitów liczby za pomocą pojedynczej instrukcji procesora) ma złożoność czasową $O(n^3/B)$. Mając takie względy na uwadze, informatycy-teoretycy już od jakiegoś czasu uwzględniają parametr B w analizach złożoności czasowych swoich algorytmów. Ważne jest tu podstawowe założenie, iż operacje arytmetyczne i logiczne na wbudowanych liczbach całkowitych można wykonywać w czasie stałym (niezależnym od B), które to założenie jest podstawą analiz złożoności bodaj wszystkich istniejących algorytmów.

A na sam koniec pozostawiamy Czytelnikom ćwiczenie z tej samej serii. Popularną metodą obliczania najkrótszych ścieżek między wszystkimi parami wierzchołków w grafie (skierowanym bądź nie) jest algorytm Floyda–Warshalla. Istnieje także prostsza wersja tego algorytmu, w której dla każdej pary wierzchołków sprawdzamy tylko, czy istnieje jakakolwiek ścieżka łącząca te wierzchołki (tę wersję nazywa się też często algorytmem wyznaczania domknięcia przechodniego grafu) – patrz pseudokod poniżej. W jaki sposób można użyć operacji na bitach do usprawnienia tego algorytmu?

```
for k := 0 to n − 1 do
  for i := 0 to n − 1 do
    for j := 0 to n − 1 do
      t[i][j] := t[i][j] or (t[i][k] and t[k][j]);
```



Jeszcze jeden wzór na pole trójkąta

W związku z *Deltoidem* z numeru 4/2009, w którym autorka zachęca do poszukiwania wzorów na pole trójkąta, chciałbym przedstawić pewien dość nietypowy wzór „fraktalny”. Nietypowy, bo pole trójkąta przedstawia jako pewną zależność od pól swoich „wewnętrznych” trójkątów – i tylko od nich. Fraktalny, ponieważ w nieskończoność można powielać pewien algorytm.

Wygląda to tak. Trójkąt ABC dzielimy trzema prostymi równoległymi do boków, przecinającymi się w dowolnym punkcie wewnętrznym D (rysunek). W wyniku takiego podziału otrzymamy trzy trójkąty podobne do trójkąta ABC i trzy równoległoboki. Oznaczając przez S_1, S_2, S_3 pola wskazanych trójkątów oraz przez S pole trójkąta ABC, otrzymujemy wzór

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2.$$

Dowód. Z podobieństwa trójkątów mamy

$$\frac{c_1}{c} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}, \qquad \frac{c_2}{c} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}, \qquad \frac{c_3}{c} = \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}},$$

i otrzymujemy

$$c = c_1 + c_2 + c_3 = c\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} + c\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} + c\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}.$$

Stąd

$$1 = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}},$$

więc

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2. \ \square$$

Dalej, analogicznie, można podzielić dowolny z trzech małych trójkątów i kontynuować ten proces, otrzymując trójkąty o polach $T_1, T_2, \ldots, T_n$ oraz wzór

$$S = \Big(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{T_k}\Big)^2.$$

Przy $n \to \infty$ uzyskujemy zatem

$$S = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{T_k}\Big)^2.$$

Wiadomo więc, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{T_k}$ jest zbieżny. Biorąc konkretne algorytmy dzielenia trójkątów, otrzymamy pewne szeregi liczbowe, których zbieżność w sposób klasyczny może być kłopotliwa do wykazania. Zachęcam Czytelników do poszukania takich przykładów.

*Andrzej WRZESIEŃ**

*Politechnika Łódzka