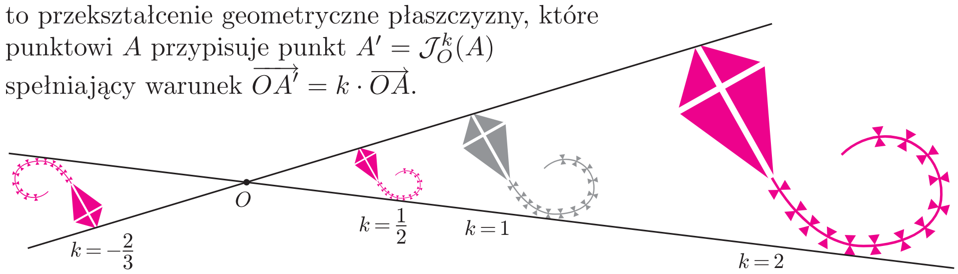
Jednokładności

Joanna JASZUŃSKA

Jednokładność o środku O i skali $k \neq 0$, oznaczana $\mathcal{J}_O^k$, to przekształcenie geometryczne płaszczyzny, które punktowi A przypisuje punkt $A' = \mathcal{J}_O^k(A)$ spełniający warunek $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.

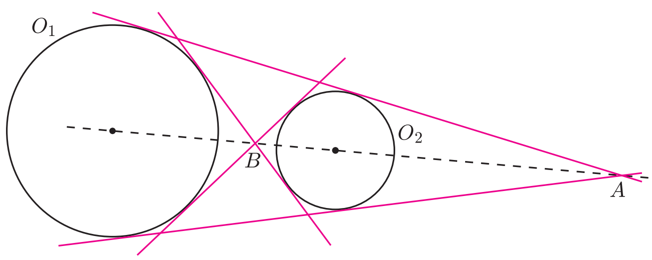
$k = 1$ – identyczność
$k = -1$ – symetria środkowa
$|k| > 1$ – „odsuwanie” od O
$0 < |k| < 1$ – „przyciąganie” do O
$k > 0$ – jednokładność *prosta*
$k < 0$ – jednokładność *odwrotna*



Rys. 1. Różne jednokładne obrazy szarego latawca.

Jednokładność ma szereg miłych własności: jest podobieństwem, obrazem prostej jest prosta do niej równoległa, punkt i jego obraz oraz środek jednokładności są współliniowe, etc.

Fakt. *Dla nieprzystających okręgów O_1 i O_2 istnieją dwie jednokładności przeprowadzające O_1 na O_2, jedna prosta, druga odwrotna* (rys. 2).



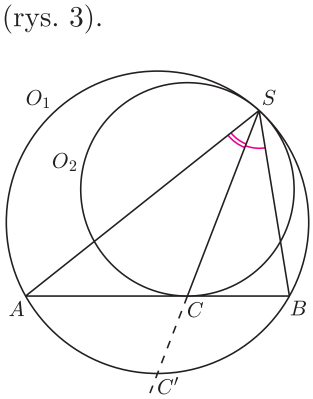
Rys. 2. A – środek jednokładności prostej, B – odwrotnej w przypadku okręgów rozłącznych zewnętrznie.

Oto kilka przykładów zastosowania jednokładności.

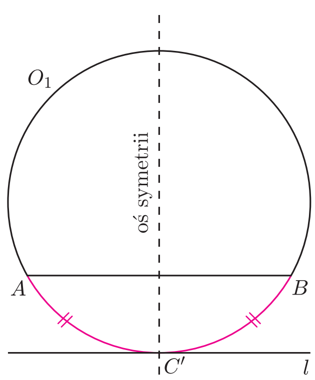
1. Banknot przykryto 25 monetami o promieniu 2. Czy da się go przykryć 100 monetami o promieniu 1?

R. Tak. Podzielmy banknot na ćwiartki dwiema prostymi równoległymi do boków i przechodzącymi przez środek. Każda część jest obrazem wyjściowego prostokąta w pewnej jednokładności o skali $\frac{1}{2}$, zatem każdą ćwiartkę da się przykryć 25 monetami o promieniu $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. $\square$

2. Okręgi O_1 i O_2 są styczne wewnętrznie w punkcie S, cięciwa AB okręgu O_1 jest styczna do O_2 w punkcie C. Wykaż, że $\sphericalangle CSA = \sphericalangle CSB$ (rys. 3).



Rys. 3



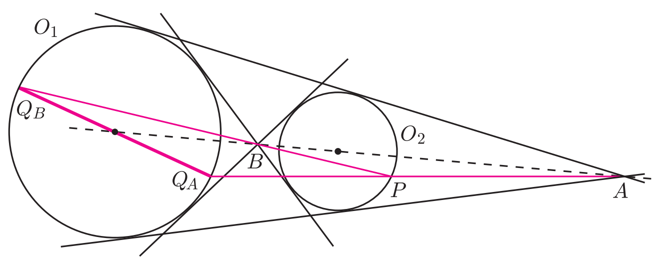
Rys. 4

R. Istnieje taka jednokładność prosta o środku S, że $\mathcal{J}_S(O_2) = O_1$. Obrazem prostej AB jest prosta l do niej równoległa i styczna do okręgu O_1 w punkcie $C' = \mathcal{J}_S(C)$ (rys. 4). Punkt C' jest zatem środkiem łuku AB, stąd $\sphericalangle ASC = \sphericalangle ASC' = \sphericalangle BSC' = \sphericalangle BSC$. $\square$

3. Nieprzystające okręgi O_1 i O_2 leżą jeden na zewnątrz drugiego. Ich wspólne styczne przecinają prostą wyznaczoną przez ich środki w punktach A i B. Niech P będzie dowolnym punktem okręgu O_2. Udowodnij, że istnieje średnica okręgu O_1, której jeden koniec leży na prostej PA, a drugi – na prostej PB.

Zadanie pochodzi z XLII Olimpiady Matematycznej.

R. Oznaczmy promienie okręgów O_1, O_2 odpowiednio przez r_1, r_2 i przyjmijmy bez straty ogólności, że $r_1 > r_2$ oraz że punkt B należy do odcinka łączącego środki okręgów, a punkt A leży poza tym odcinkiem (rys. 5). Wtedy $\mathcal{J}_A^{r_1/r_2}(O_2) = O_1 = \mathcal{J}_B^{-r_1/r_2}(O_2)$.



Rys. 5

Niech $Q_A = \mathcal{J}_A^{r_1/r_2}(P)$ oraz $Q_B = \mathcal{J}_B^{-r_1/r_2}(P)$. Punkt Q_A leży wówczas na prostej PA, punkt Q_B na PB. Pozostawiam do sprawdzenia, że Q_AQ_B jest średnicą okręgu O_1. $\square$

Zadania domowe:

4. Rozłączne okręgi O_1 i O_2 są styczne wewnętrznie do okręgu O w punktach odpowiednio S i T. Prosta l, nierozdzielająca okręgów O_1 i O_2, jest do nich styczna w punktach odpowiednio P i Q. Wykaż, że proste SP i TQ przecinają się w punkcie należącym do okręgu O.

5*. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ boki AE i BC są równoległe oraz $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDC$. Przekątne AC i BE przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że $\sphericalangle EAD = \sphericalangle BDP$ oraz $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ADP$. *Wskazówka.* Rozważ $\mathcal{J}_P^{-PA/PC}$.