

teraz obliczyć, korzystając z odpowiednich prawdopodobieństw warunkowych:

$$(2) \quad P(\alpha, \beta) = \frac{1}{n} \sum P(A, B | a, b).$$

W powyższym wzorze sumujemy po takich A, B, a, b , że $A \subseteq \{1, 2, \dots, \alpha\}$, $B \subseteq \{1, 2, \dots, \beta\}$ oraz $a = \min A$, $b = \min B$ i $\alpha = \max A$, $\beta = \max B$. Aby móc uczynić użytek z zależności (2), posłużymy się następującym wzorem:

$$(3) \quad P(A, B | a, b) = \prod_{i \in A, i < \alpha} \frac{1}{h_{i\beta} - 1} \prod_{j \in B, j < \beta} \frac{1}{h_{\alpha j} - 1}.$$

Udowodnimy go przez indukcję względem długości ścieżki k . Dla $k = 1$ się zgadza (dlaczego?). Gdy $k > 1$, to ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy równość

$$P(A, B | a, b) = \frac{1}{h_{ab} - 1} \cdot (P(A \setminus \{a\}, B | a_2, b_1) + P(A, B \setminus \{b\} | a_1, b_2)).$$

Pierwszy składnik odpowiada wybraniu drogi w dół, a drugi – drogi w prawo w haczyku H_{ab} (rys. 12). Zarówno $A \setminus \{a\}$, B , jak i A , $B \setminus \{b\}$ odpowiadają ścieżkom długości $k - 1$, zatem na mocy indukcji mamy

$$P(A \setminus \{a\}, B | a_2, b_1) = (h_{a\beta} - 1) \cdot \Gamma$$

oraz

$$P(A, B \setminus \{b\} | a_1, b_2) = (h_{\alpha b} - 1) \cdot \Gamma,$$

gdzie Γ to prawa strona w równości (3). Wobec tego

$$P(A, B | a, b) = \frac{1}{h_{ab} - 1} \cdot ((h_{a\beta} - 1) + (h_{\alpha b} - 1)) \cdot \Gamma = \Gamma,$$

bo, jak pokazuje prosty argument rysunkowy (patrz rys. 13),

$$h_{ab} - 1 = (h_{a\beta} - 1) + (h_{\alpha b} - 1).$$

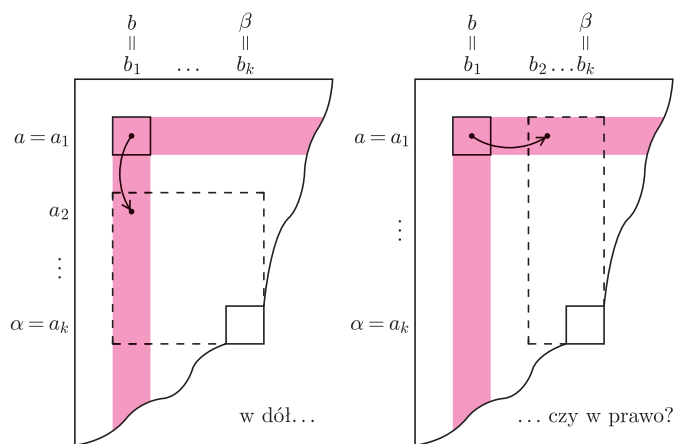
To kończy dowód wzoru (3).

Jeżeli teraz wstawimy wynik ze wzoru (3) do równości (2), to otrzymamy:

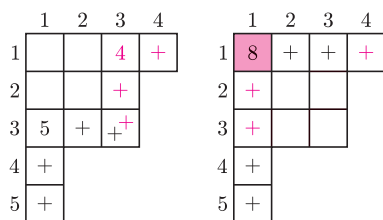
$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta) &= \frac{1}{n} \sum P(A, B | a, b) = \frac{1}{n} \sum \prod_{i \in A, i < \alpha} \frac{1}{h_{i\beta} - 1} \prod_{j \in B, j < \beta} \frac{1}{h_{\alpha j} - 1} = \\ &= \frac{1}{n} \prod_{1 \leq i < \alpha} \left(1 + \frac{1}{h_{i\beta} - 1}\right) \prod_{1 \leq j < \beta} \left(1 + \frac{1}{h_{\alpha j} - 1}\right) = \frac{f_\alpha}{f}. \end{aligned}$$

Rzeczywiście, po wymnożeniu prawej strony we wzorze (1) uzyskujemy sumę, której składniki są dokładnie postaci (3). Czyli $P(\alpha, \beta) = f_\alpha/f$. To kończy dowód!

Pusty iloczyn (iloczyn niezawierający żadnego czynnika) jest równy 1.



Rys. 12



Rys. 13. $8 - 1 = (4 - 1) + (5 - 1)$.

Wyniki XXVI Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków, Bystra, 4–7 VI 2009

Konkurs polega na przedstawieniu opracowania jednego z tematów zaproponowanych przez Jury (wraz z bibliografią) lub tematu własnego oraz – w przypadku zakwalifikowania się do finału – krótkim, publicznym zreferowaniu tego opracowania.

W roku 2009/10 zaproponowane przez Jury tematy to:

nieziemienniki topologiczne, zdarzenia nieprawdopodobne, moje ulubione krzywe, liczby pierwsze, obliczanie „okropnych” sum nieskończonych, twierdzenia typu Ramseya, Enigma i inne takie, algorytmy przybliżone, różne systemy numeracji, potęga punktu względem okręgu.

Sejmiki organizuje Pracownia Matematyki i Informatyki Pałacu Młodzieży w Katowicach we współpracy z Uniwersytetem Śląskim; www.spinor.edu.pl

Jury w składzie: prof. dr hab. Maciej Sablik – przewodniczący, dr Marian Podhorodyński – zastępca przewodniczącego, dr Lech Bartłomiejczyk, dr Tomasz Bielaczyc, dr Adrian Brückner, dr Włodzimierz Fechner, mgr Żywilla Fechner, dr Maria Górniołek, dr Erwin Kasperek, mgr Renata Kawa, mgr Tomasz Kochanek, dr hab. Mieczysław Kula, dr Michał Machura, dr Janusz Morawiec, dr Barbara Przebieracz, dr Anna Szczerba-Zubek, przyznało

I nagrodę **Janowi Wegehauptowi** z VIII LO w Katowicach za pracę *Słów kilka o uprawianiu geometrii na powierzchni sześciannu*;

II nagrodę **Tomaszowi Smolarczykowi** z I LO w Pszczynie za pracę *Rozwiązywanie równań wielomianowych*;

III nagrodę **Patrycji Osadnik** z I LO w Lublińcu za pracę *Geometria w geografii*;

IV nagrodę **Krystianowi Gruszczyńskiemu** z I LO w Koszalinie za pracę *Matematyka i origami*.

W głosowaniu na najlepszą prezentację nauczyciele nagrodzili **Jana Wegehaupta**, a uczniowie **Adama Śmiałkowskiego**, obu z VIII LO w Katowicach.