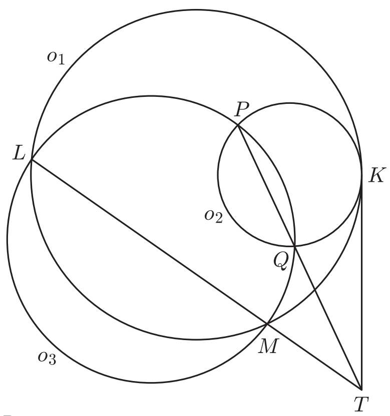
mała delta

Środek potęgowy trzech okręgów



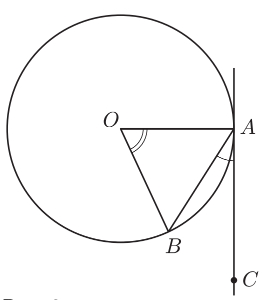
Rys. 1

W poprzednim artykule (*Delta* 11/2009) sformułowaliśmy twierdzenie, które było wykorzystane w konstrukcji. Teraz podamy jego dowód. A oto nasze twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Dane są trzy okręgi o_1, o_2 i o_3. Okrąg o_2 jest styczny wewnętrznie do okręgu o_1 w punkcie K. Okrąg o_3 przecina okrąg o_1 w punktach L i M i przecina okrąg o_2 w punktach P i Q. Prosta PQ i styczna do okręgów o_1 i o_2 w punkcie K mają punkt wspólny T* (rys. 1). *Wtedy punkty L, M i T są współliniowe.*

Punkt T nazywamy *środkiem potęgowym* okręgów o_1, o_2 i o_3.

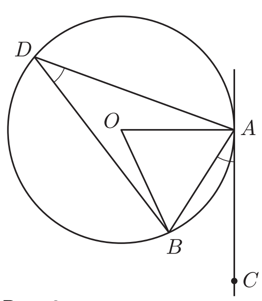
Będziemy dowodzić szeregu prostych twierdzeń. Zaczniemy od udowodnienia twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą.



Rys. 2

Twierdzenie 2. *Przypuśćmy, że prosta AC jest styczna do okręgu w punkcie A. Niech odcinek AB będzie cięciwą tego okręgu. Wtedy kąt BAC jest połową kąta środkowego BOA opartego na łuku AB zawartym wewnątrz kąta BAC* (rys. 2).

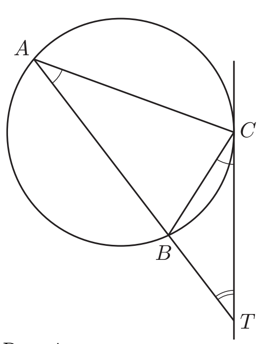
Dowód. Oznaczmy przez α kąt BAC. Wtedy $\sphericalangle BAO = 90^\circ - \alpha$ oraz $\sphericalangle BOA = 180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle BAO = 180^\circ - 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = 2\alpha$.



Rys. 3

Twierdzenie 3. *Niech prosta AC będzie styczna do okręgu w punkcie A i niech odcinek AB będzie cięciwą tego okręgu. Wtedy kąt BAC jest równy kątowi wpisanemu BDA opartemu na łuku AB zawartym wewnątrz kąta BAC* (rys. 3).

Dowód. Zauważmy, że przy oznaczeniach z twierdzenia 2 mamy $\sphericalangle BDA = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BOA = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha = \sphericalangle BAC$.



Rys. 4

Twierdzenie 4. *Niech prosta CT będzie styczna do okręgu w punkcie C. Niech następnie prosta przechodząca przez punkt T przecina okrąg w punktach A* i *B* (rys. 4). *Wtedy $TC^2 = TA \cdot TB$.*

Dowód. Z twierdzenia 3 wynika, że $\sphericalangle CAT = \sphericalangle BCT$. Ponadto trójkąty CAT i BCT mają wspólny kąt przy T. Stąd wynika, że te trójkąty są podobne. Mamy zatem

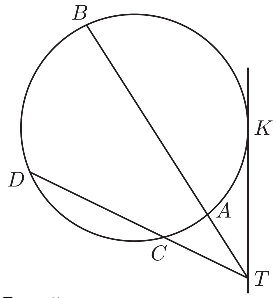
$$\frac{TA}{TC} = \frac{TC}{TB},$$

skąd wynika, że $TC^2 = TA \cdot TB$.

Twierdzenie 5. *Dwie proste przechodzące przez punkt T (leżący na zewnątrz okręgu) przecinają okrąg w punktach A i B oraz C* i *D* (rys. 5). *Wtedy $TA \cdot TB = TC \cdot TD$.*

Dowód. Poprowadźmy styczną TK do okręgu. Z twierdzenia 4 wynika, że

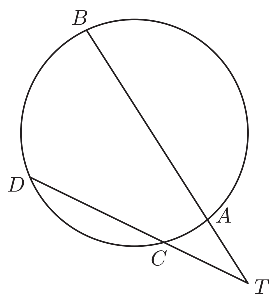
$$TA \cdot TB = TK^2 = TC \cdot TD.$$



Rys. 5

Twierdzenie 6. *Dane są dwie nieleżące na jednej prostej półproste o wspólnym początku T. Punkty A i B leżą na jednej półprostej, punkt C na drugiej. Ponadto $TA \cdot TB = TC^2$. Wtedy półprosta TC jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABC (przy czym, oczywiście, punktem styczności jest punkt C).*

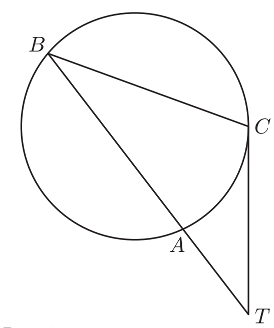
Dowód. Punkty A, B i C nie są współliniowe, więc można poprowadzić okrąg przez te punkty. Prosta TA przecina ten okrąg w dwóch punktach A i B. Punkt T nie leży wewnątrz odcinka AB, więc leży na zewnątrz okręgu. Stąd wynika, że półprosta TC jest styczna do okręgu lub przecina go w dwóch punktach. Gdyby półprosta TC przecinała ten okrąg w dwóch różnych punktach C i D (rys. 6), to z twierdzenia 5 mielibyśmy $TA \cdot TB = TC \cdot TD$, czyli $TC = TD$, wbrew przypuszczeniu, że punkty C i D są różne. Zatem punkt C jest jedynym punktem wspólnym prostej TC i okręgu.



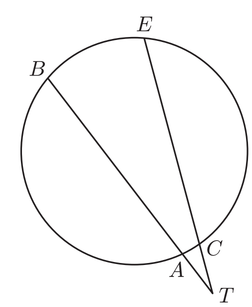
Rys. 6

Twierdzenie 7. *Dane są dwie nieleżące na jednej prostej półproste o wspólnym początku T. Na jednej z nich wybieramy dwa punkty A i B, na drugiej dwa punkty C i D. Ponadto $TA \cdot TB = TC \cdot TD$. Wtedy punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu.*

Dowód. Punkty A, B i C nie są współliniowe, więc można poprowadzić okrąg przez te punkty. Tak jak w poprzednim dowodzie punkt T leży na zewnątrz okręgu. Stąd wynika, że półprosta TC jest styczna do okręgu lub przecina go w dwóch punktach. Gdyby ta półprosta była styczna do okręgu (rys. 7), to punkt C byłby punktem styczności i z twierdzenia 4 mielibyśmy równość $TA \cdot TB = TC^2$. Zatem $TC^2 = TC \cdot TD$, skąd otrzymalibyśmy równość $TC = TD$. Punkty C i D pokrywałyby się wbrew założeniu. Niech zatem półprosta TC przecina okrąg w punkcie E różnym od C (rys. 8). Wtedy z twierdzenia 5 wynika, że $TA \cdot TB = TC \cdot TE$, czyli $TD = TE$. Zatem $D = E$, czyli punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu.



Rys. 7

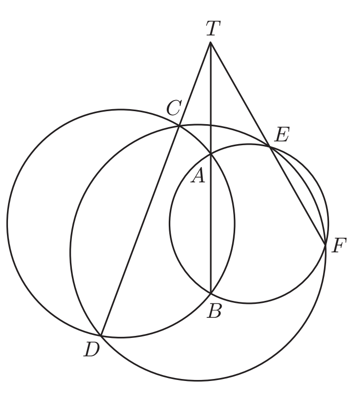


Rys. 8

Dowód twierdzenia 1. Ponieważ półprosta TK jest styczna do okręgu o_1, więc punkt T leży na zewnątrz tego okręgu. Mamy teraz dwa przypadki.

Przypadek 1. Półprosta TL jest styczna do okręgu o_1. Wtedy $TK = TL$. Z twierdzenia 4 (zastosowanego do okręgu o_2) wynika, że $TK^2 = TP \cdot TQ$, czyli $TL^2 = TP \cdot TQ$. Z twierdzenia 6 wynika, że półprosta TL jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie PQL, czyli do o_3. Okręgi o_1 i o_3 są więc styczne, wbrew założeniu, że mają dwa punkty wspólne.

Przypadek 2. Półprosta TL przecina okrąg o_1 w dwóch punktach L i N. Wtedy z twierdzenia 4 (zastosowanego do okręgów o_1 i o_2) wynika, że $TL \cdot TN = TK^2$ oraz $TP \cdot TQ = TK^2$. Zatem $TP \cdot TQ = TL \cdot TN$, czyli punkty P, Q, L i N leżą na okręgu. To znaczy, że punkt N leży na okręgu opisanym na trójkącie PQL, czyli na okręgu o_3. Punkty L, M i N są więc punktami wspólnymi okręgów o_1 i o_3, skąd wynika, że $M = N$, czyli punkty T, L i M są współliniowe.



Rys. 9

Środek potęgowy trzech okręgów definiujemy też, gdy każde dwa okręgi przecinają się w dwóch punktach (rys. 9). Dowód, że proste AB, CD i EF przecinają się w jednym punkcie T, jest podobny do dowodu przeprowadzonego wyżej. Środek potęgowy można też zdefiniować, gdy okręgi się nie przecinają, ale to już nie będzie przedmiotem naszych rozważań.

Warto też zajrzeć do zadań w numerze 8/2009.

Małą Deltę przygotował Wojciech GUZICKI