Rudy osioł

Bardzo rozpowszechnione są różne zabawki polegające na tym, by przez przesuwanie pionków o określonym kształcie w ograniczonym obszarze uzyskać pożądany ich porządek.

Szczepan Jeleński w swojej *Lilavati* pisze np. o *Piętnastce*, znanej pod angielską nazwą *Fifteen Puzzle* czy pod francuską nazwą *Taquin*. Została ona ponoć wymyślona w 1878 roku, a największą popularność miała w pierwszym ćwierćwieczu ubiegłego wieku. W grze tej przesuwamy w kwadratowym pudełeczku pionki-kwadraciki o krawędziach cztery razy krótszych od brzegu pudełeczka. Kwadracików tych jest 15, więc jest też wolne miejsce rozmiarów jednego kwadracika, co pozwala na stopniowe zmienianie położeń pionków. Zadaniem grającego jest – poprzez przesuwanie pionków – przejście od danego ułożenia do ustawienia ich „po kolei", czyli tak, jak na rysunku 1 – nazwijmy ten stan *sukcesem*.

Ciekawą rzeczą jest to, że nie dla każdego wstępnego ułożenia pionków w pudełeczku możliwe jest doprowadzenie do sukcesu. Zatem poza przesuwaniem pionków można postawić sobie w związku z Piętnastką np. następujące pytania:

– jak poznać, czy dany układ (np. ten z rysunku 2) pozwala na doprowadzenie do sukcesu?
– jeśli nie pozwala, to ile co najmniej pionków trzeba nielegalnie (to jest wyjmując z pudełka) zamienić, aby doprowadzenie do sukcesu było możliwe?
– które to pionki?

Pozostawiając Czytelnika z tymi problemami, przejdźmy do tytułowego *Rudego osła*.

Jest to gra podobna do Piętnastki, bo też przesuwamy pionki w pudełeczku. Tyle że teraz pudełeczko ma wymiary 4×5, a wewnątrz są następujące pionki: cztery kwadraciki 1×1, cztery prostokąty 1×2, jeden prostokąt 2×1 i jeden kwadrat 2×2 – na tym ostatnim (u nas oznaczonym liczbą 2) jest z reguły wizerunek oślej głowy, stąd nazwa gry. Położenie wstępne pionków jest zawsze jednakowe, takie jak na rysunku 3. A sukcesem jest tutaj umieszczenie oślej głowy, czyli dużego kwadratu, pośrodku dolnej krawędzi, jak na rysunku 4, przy czym jest obojętne, jak będą rozmieszczone pozostałe pionki. Zadanie to jest wykonalne, a grający powinien postarać się o to, by osiągnąć sukces w możliwie małej liczbie ruchów.

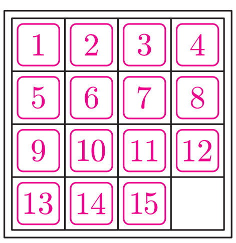
Jaka jest najmniejsza możliwa liczba ruchów – nie wiem. Oto przepis na uzyskanie sukcesu w 118 pojedynczych posunięciach (litery p, l, g, d to skróty odpowiednio od jeden w prawo, jeden w lewo, jeden w górę, jeden w dół):

9p, 4d, 5l, 8d, 6l, 10g, 8p, 6d, 5p, 5p, 7g, 7l, 9g, 9g, 6l, 10l, 10d, 5d, 9p, 9p, 7p, 7p, 4g, 6g, 10l, 10l, 8l, 8l, 5d, 7d, 7p, 6p, 4p, 1d, 1d, 2l, 3l, 9g, 9g, 7g, 7g, 6p, 3d, 3d, 2p, 1g, 1g, 4l, 8g, 8g, 10p, 10g, 5l, 5l, 3d, 6d, 8p, 8p, 2d, 9l, 9l, 7g, 7l, 8g, 8g, 6g, 6g, 3p, 10p, 10d, 2d, 9d, 9p, 1p, 4g, 4g, 2l, 9d, 9d, 7d, 8l, 6g, 3g, 10p, 9d, 2p, 4d, 4d, 1l, 8l, 7l, 6l, 3g, 3g, 2p, 7d, 7d, 8d, 8d, 1p, 4g, 4g, 7l, 7g, 5g, 9l, 9l, 10l, 10l, 2d, 8p, 8p, 7p, 7p, 5g, 10g, 10l, 2l.

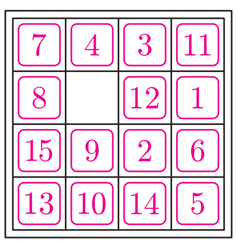
Uzyskuje się tym sposobem ułożenie pionków takie, jak na rysunku 5.

Ciekawe, czy ktoś z Czytelników znajdzie sposób uzyskania sukcesu w mniejszej liczbie pojedynczych ruchów?

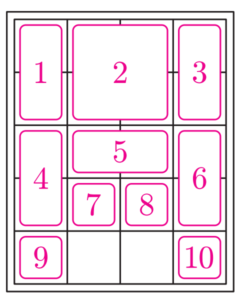
M. K.



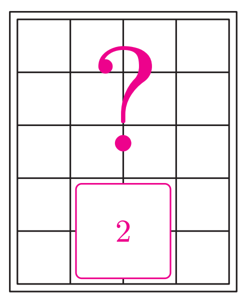
Rys. 1



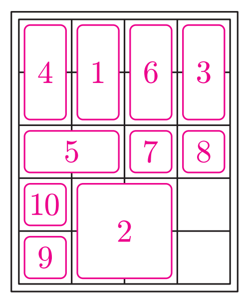
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Rudy osioł – podejście informatyczne

Po przeczytaniu notki o łamigłówce *Rudy osioł* informatykowi może nasunąć się myśl, aby do znalezienia najmniejszej liczby ruchów potrzebnych do przejścia od stanu początkowego do końcowego spróbować zaprząc komputer. Mnie jednak wpadł najpierw do głowy pomysł wymagający istotnie mniej wysiłku: może warto spróbować poszperać w Internecie – a nuż znajdzie się tam gotowe rozwiązanie?

Wyniki przeszukiwania sieci globalnej przerosły moje najśmielsze oczekiwania. Pragnąc dotrzeć do możliwie największej liczby punktów odniesienia, postanowiłem poszukać jakichś informacji na stronach anglojęzycznych. W tym celu potrzebowałem poznać międzynarodową nazwę oślej łamigłówki. I zdziwiłem się niemało, gdy okazało się, że łamigłówka figuruje w angielskiej Wikipedii pod nazwą... *Klotski*, czyli „prawie" klocki.

Jak to z takimi grami bywa, istnieje kilka odmian Klotsków pochodzących z różnych krajów: w Japonii pionek 2×2 utożsamiany jest z córką uwięzioną w budynku, w Chinach – z legendarnym bohaterem Cao Cao, w Tajlandii – z uciekającym z więzienia Khunem Phaenem itd. Opisane wersje właściwie się nie różnią, lecz znane są też odmiany tej łamigłówki o trochę innych pozycjach początkowych, docelowych, tudzież rodzajach klocków. Skąd więc, przy całej tej rozmaitości, swojsko brzmiąca międzynarodowa nazwa Klotski?

Trudno znaleźć w Internecie jednoznaczną odpowiedź na to pytanie, krąży wiele różnych pogłosek (że, na przykład, polskie dzieci grały w Klocki, by doskonalić umiejętność myślenia strategicznego), ostatecznie jednak ślady, które znalazłem na polskich i chińskich (sic!) blogach, prowadzą do pakietu gier wydanego wraz z systemem Microsoft Windows 3.1, w którym po raz pierwszy omawiana gra pojawiła się w wersji elektronicznej pod taką właśnie nazwą. Z kolei Microsoft zakupił licencję tej gry od innej firmy, której prezesem był w owym czasie podobno pewien emigrant z Polski…

Ponieważ na podstawie materiałów znalezionych w sieci nie zdołałem wyrobić sobie jednoznacznej opinii na temat faktycznego pochodzenia łamigłówki, więc pozostawiam Czytelnikom dalsze dociekanie i wracam do meritum. Otóż w Wikipedii można znaleźć informację, że minimalną liczbą ruchów potrzebnych do rozwiązania Klotsków, przy założeniu, że klocki można przesuwać w jednym ruchu o więcej niż jedno pole (a zatem o jedno lub o dwa), jest 81, a pierwszym, który opublikował takie rozwiązanie w 1964 r., był Martin Gardner. Nie doszukałem się jednakże danych na temat wersji gry, w której dozwolonymi ruchami są jedynie pojedyncze przesunięcia, więc musiałem zająć się jej rozwiązaniem sam – oczywiście z pomocą komputera.

Do radzenia sobie z podobnymi problemami najłatwiej jest wykorzystać technikę o mądrze brzmiącej nazwie *przeszukiwanie przestrzeni stanów*. Polega ona na tym, że abstrahujemy nieco od konkretnej struktury problemu – wszystkie możliwe postaci planszy traktujemy jako stany, wśród których wyróżniamy początkowy i końcowy (czy też końcowe), i dla każdego stanu wyznaczamy, do których stanów można z niego przejść w jednym posunięciu – po czym w grafie stanów (krawędziami są opisane pojedyncze przejścia) uruchamiamy odpowiedni algorytm przeszukiwania. Przy poszukiwaniu najkrótszej ścieżki może to być, na przykład, przeszukiwanie wszerz (BFS). Zasadniczym kryterium możności zastosowania tej metody jest tylko i wyłącznie to, ile różnych stanów występuje w przypadku danej gry oraz do ilu stanów można z zadanego stanu przejść w jednym ruchu. Pierwszy z tych parametrów odpowiada za złożoność pamięciową przeszukiwania, a drugi za złożoność czasową.

W przypadku wielu znanych łamigłówek już nawet liczba stanów jest na tyle duża, że praktycznie uniemożliwia zastosowanie opisanej techniki – na przykład, chociażby w malutkiej Piętnastce jest ich aż $16! \approx 2 \cdot 10^{14}$ (to oszacowanie uzyskujemy, traktując wolne pole jak szesnasty pionek). Okazuje się jednak, że – jakkolwiek plansza w tym przypadku jest większa – w Rudym ośle możliwych stanów jest o wiele mniej, jeżeli tylko odpowiednio starannie ustalimy, które stany są dla nas *faktycznie różne*, a które możemy swobodnie utożsamić.

Zliczanie stanów zacznijmy od tego, że kwadrat 2×2 możemy umieścić na planszy na $3 \cdot 4$ sposoby (dlaczego?), następnie prostokąt 2×1 na co najwyżej $3 \cdot 5$ sposobów (a nawet z pewnością mniej niż tyle, gdyż duży kwadrat w każdym położeniu uniemożliwia pewne umiejscowienia tego prostokąta). Dalej przychodzi nam z pomocą kluczowa obserwacja: jeżeli chodzi o kwadraty 1×1, to tak naprawdę w opisie stanu zupełnie nas nie interesuje, które z nich są które, czyli możemy je traktować jako *nierozróżnialne*. Wynika to m.in. stąd, że w położeniu końcowym (rys. 4 na poprzedniej stronie) ich rozmieszczenie nie jest dla nas w ogóle istotne. Stąd ich położenia są z naszego punktu widzenia wyznaczone jednoznacznie poprzez kombinację 4 liczb z 14-elementowego zbioru (14 to wszystkie pola minus te już obsadzone). Podobnie, pozostałe cztery prostokąty 1×2 możemy traktować jako nierozróżnialne. W tym przypadku jednak fakt, że do ich jednoznacznej identyfikacji na planszy wystarczy znajomość zajętych przez nie wszystkie pól (kombinacja 8 liczb z 10), jest dużo mniej oczywisty. Wynika to mianowicie stąd, że jeżeli znamy osiem pól, które zajmują nasze cztery prostokąty, to na ich podstawie możemy jednoznacznie wyznaczyć położenia tych prostokątów, na przykład w pętli łącząc w pary dowolne z najniżej położonych spośród tych pól z jego górnym sąsiadem.

Ostatecznie liczba stanów w Klotskach jest ograniczona przez

$$12 \cdot 15 \cdot \binom{14}{4} \cdot \binom{10}{8} = 8\,108\,100,$$

a to jest już wielkość nieprzekraczająca możliwości w miarę nowoczesnego komputera. Dalej, ponieważ w każdym stanie są dokładnie dwa wolne pola, to liczba przejść z każdego stanu jest nie większa niż 8 (dlaczego?), co w łącznym rozrachunku dobrze ogranicza liczbę krawędzi koniecznych do przejrzenia przy przeszukiwaniu.

Wiemy już, że możemy śmiało wykorzystać przeszukiwanie przestrzeni stanów do ostatecznego rozstrzygnięcia tego, jaka jest długość najkrótszej kombinacji ruchów rozwiązującej łamigłówkę Rudy osioł. Kiedy jednak zacznie się faktycznie implementować odpowiedni program, zaczynają się nagle pojawiać różne istotne pytania natury technicznej: Jakiej struktury użyć do reprezentacji stanów? Jak przy wybranej reprezentacji efektywnie (ale zarazem możliwie najprościej) wyznaczyć wszystkie krawędzie wychodzące z danego stanu? Jakich struktur danych użyć w samym przeszukiwaniu (do pamiętania już odwiedzonych stanów i ich odległości od stanu początkowego)? Wreszcie, jak odzyskać wynik, czyli nie tylko odległość od stanu początkowego do końcowego, ale ruchy, jakie należy po kolei wykonać (np. w formacie 9p, 4d, 5l, …, w którym pionki są już ewidentnie rozróżnialne)?

Mnie się udało przezwyciężyć jakoś te wszystkie trudności i napisałem stosowny program, dzięki któremu wiem już, czy istnieje rozwiązanie Rudego osła w mniej niż 118 ruchach. Nie zdradzę jednak jeszcze odpowiedzi na to pytanie, lecz zachęcam Czytelników do samodzielnego zmierzenia się z tym problemem (z użyciem komputera lub też bez). A programy firmowane przez redakcję (wraz z jakimiś odpowiedziami na postawione pod koniec pytania techniczne) ukażą się na stronie internetowej *Delty* wraz z numerem 5/2010.

Jakub RADOSZEWSKI