Déjà vu

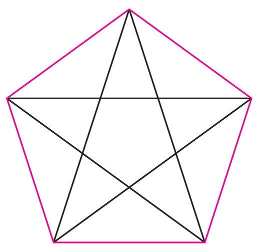
Joanna JASZUŃSKA

Niektóre fakty matematyczne są na tyle uniwersalne i przydatne, że pojawiają się niezwykle często, w najrozmaitszych kontekstach i sformułowaniach. Przykładem jest poniższe zadanie 1, dalsze zaś zadania to różne jego „wcielenia” oraz zastosowania.

1. Spotkało się sześć osób, niektóre z nich się znają. Wykaż, że istnieje wśród nich taka trójka osób, że każde dwie się znają lub żadne dwie się nie znają. Zakładamy, że jeśli osoba A zna osobę B, to również B zna A.

R. Osoba O wśród pozostałych pięciu osób albo co najmniej trzy zna, albo co najmniej trzech nie zna. W pierwszym przypadku, jeśli pewna para jej znajomych się zna, to wraz z O tworzą szukaną trójkę. Jeśli zaś z trojga znajomych O żadnych dwoje się nie zna, to oni tworzą szukaną trójkę. Drugi przypadek rozważamy analogicznie. □

Przy pięciu osobach trójka jak z zadania 1 może nie istnieć. Wierzchołki pięciokąta to osoby, kolorowa linia oznacza znajomych, czarna – nieznajomych.



Najmniejszą liczbę osób o opisanej w zadaniu 1 własności nazywa się *liczbą Ramseya* $R(3,3)$. Z powyższego przykładu oraz z zadania 1 wynika, że $5 < R(3,3) \leqslant 6$, zatem $R(3,3) = 6$.

2. Budowniczy i Malarz grają w następującą grę. Budowniczy zaczyna i w każdym swoim ruchu rysuje na płaszczyźnie odcinek. Malarz w swoim ruchu koloruje ten odcinek na żółto lub zielono. Budowniczy wygra, jeśli powstanie jednokolorowy trójkąt, którego bokami są całe odcinki. Czy zawsze może wygrać?

R. Tak. Może zacząć od narysowania pięciu odcinków o wspólnym końcu. Malarz musi pewne trzy z nich pomalować tym samym kolorem, powiedzmy żółtym. Wtedy Budowniczy łączy ich drugie końce, budując trójkąt. Jeśli Malarz którykolwiek bok pokoloruje na żółto, to przegra. Ale jeśli wszystkie trzy pomaluje na zielono, też przegra! □

Następujące zadanie pozostawmy jako proste ćwiczenie.

3. Pomiędzy niektórymi z pewnych n miast są drogi. Dla dowolnie wybranych trzech miast istnieją dokładnie jedna lub dokładnie dwie z trzech możliwych łączących je dróg. Czy może być $n = 6$?

4. W Lolandii jest 17 miast, z których każde dwa łączy jeden z trzech środków komunikacji: LOT, PKS albo PKP. Udowodnij, że pomiędzy pewnymi trzema miastami można odbyć podróż „po trójkącie”, korzystając tylko z jednego środka komunikacji.

R. Niemożliwe, aby każdym z trzech środków transportu dawało się dotrzeć ze stolicy do najwyżej 5 z pozostałych 16 miast, bo $3 \cdot 5 < 16$. Przyjmijmy więc, że pociągiem można dotrzeć do pewnych 6 miast. Jeśli któreś dwa z nich też łączy kolej, to one wraz ze stolicą tworzą szukany trójkąt. W przeciwnym przypadku każde dwa z nich łączy jeden z dwóch pozostałych środków komunikacji i dalszy dowód przebiega jak w zadaniu 1. □

Czytelnik teraz bez trudu zapewne rozwiąże następujące zadanie z XXXVII Olimpiady Matematycznej.

5. W turnieju szachowym uczestniczy 66 zawodników, każdy z każdym rozgrywa jedną partię, rozgrywki odbywają się w czterech miastach. Udowodnij, że pewna trójka zawodników rozgrywa wszystkie partie między sobą w tym samym mieście.

6. Liczby $1, 2, \ldots, 65$ podzielono na cztery rozłączne zbiory. Wykaż, że w którymś z nich znajdą się takie (niekoniecznie różne) liczby x, y, z, że $x + y = z$.

R. Każdemu z czterech zbiorów przypiszmy inny kolor. Narysujmy 66 punktów ponumerowanych od 1 do 66. Każde dwa punkty połączmy tym kolorem, który przypisano zbiorowi zawierającemu różnicę ich numerów. Wówczas, analogicznie do zadania 5, istnieją takie trzy punkty ponumerowane liczbami $a > b > c$, że łączące je odcinki są tego samego koloru. Wtedy liczby $x = a - b$, $y = b - c$ oraz $z = a - c$ wszystkie należą do jednego z danych czterech zbiorów i spełniają równość $x + y = z$. □

Na koniec proponuję zadanie z II Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów oraz pewną rozrywkę.

7. W przestrzeni danych jest 6 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów, narysowano 10 odcinków. Wykaż, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.

Rozwiązanie na stronie www.sem.edu.pl/omg

Gra Sim. Planszą do gry są wierzchołki sześciokąta foremnego. Dwaj gracze na przemian, każdy innym kolorem, rysują dowolny bok lub przekątną sześciokąta. Przegrywa ten, kto swoim kolorem narysuje trzy odcinki tworzące trójkąt (uwzględniamy tylko trójkąty o wierzchołkach w wierzchołkach wyjściowego sześciokąta).