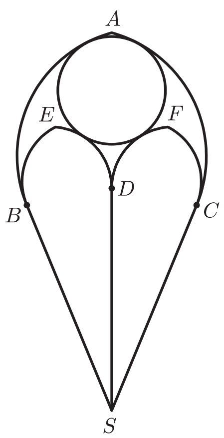
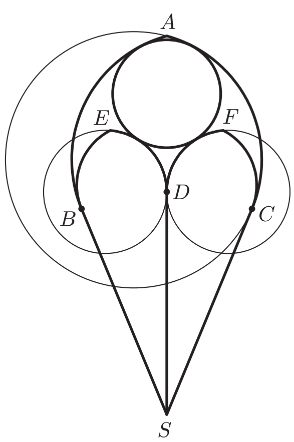
mała delta

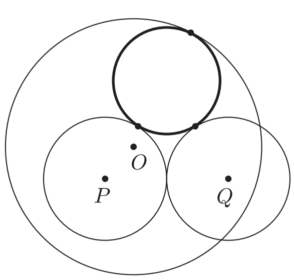
Rozeta katedry w Metz – dokończenie



Rys. 1



Rys. 2



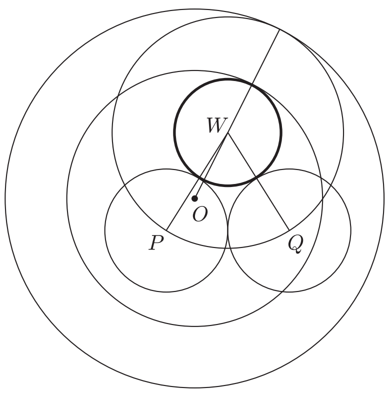
Rys. 3

Do zakończenia rozety z katedry w Metz (patrz *Delta* 9/2009) pozostało nam wpisanie okręgów w osiem ostrołuków. Każdy okrąg ma być styczny wewnętrznie do łuków AB i AC oraz styczny zewnętrznie do łuków DE i DF (rysunek 1). W tym artykule pokażemy, w jaki sposób można skonstruować taki okrąg. Zauważmy najpierw, że ze względu na symetrię względem osi AS wystarczy skonstruować okrąg styczny wewnętrznie do łuku AC i zewnętrznie do łuków DE i DF. Narysujmy okręgi, których fragmentami są te trzy łuki (rysunek 2). Naszym celem jest więc skonstruowanie okręgu stycznego do trzech danych okręgów: do dwóch zewnętrznie i do jednego wewnętrznie. Zadanie skonstruowania okręgu stycznego do trzech danych okręgów było już znane w starożytności i dzisiaj nosi nazwę zadania Apoloniusza. Nasze zadanie jest szczególnym przypadkiem zadania Apoloniusza: oba mniejsze okręgi, do których szukany okrąg ma być styczny zewnętrznie, mają równe promienie. Na rysunku 3 widzimy wszystkie okręgi: duży okrąg o środku w punkcie O i promieniu R oraz dwa okręgi o środkach w punktach P i Q i jednakowych promieniach r. Szukany okrąg został narysowany grubszą linią; zaznaczono także punkty styczności szukanego okręgu z trzema danymi okręgami. Narysujmy teraz okrąg o tym samym środku, co szukany okrąg, i o promieniu większym o r (rysunek 4). Ten nowy okrąg przejdzie, oczywiście, przez punkty P i Q oraz będzie styczny wewnętrznie do okręgu o środku O i promieniu $R+r$. Skonstruowanie tego większego okręgu pozwoli, oczywiście, skonstruować szukany okrąg: będziemy mieli jego środek i wystarczy skrócić promień o daną długość r. Mamy zatem do rozwiązania nowe zadanie. Dany jest okrąg o środku w punkcie O oraz dwa punkty P i Q leżące wewnątrz tego okręgu. Należy skonstruować okrąg przechodzący przez punkty P i Q oraz styczny wewnętrznie do danego okręgu o środku w punkcie O. W rozwiązaniu tego zadania skorzystamy z następującego twierdzenia o trzech okręgach.

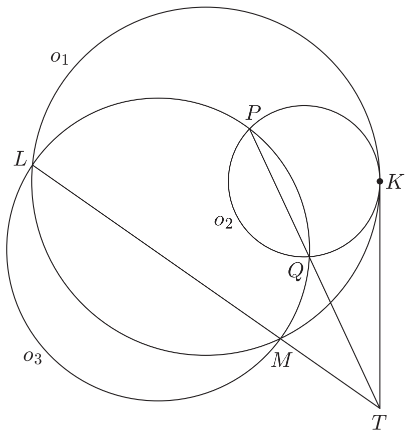
Twierdzenie. *Dane są trzy okręgi o_1, o_2 i o_3. Okrąg o_2 jest styczny wewnętrznie do okręgu o_1 w punkcie K. Okrąg o_3 przecina okrąg o_1 w punktach L i M i przecina okrąg o_2 w punktach P i Q. Prosta PQ i styczna do okręgów o_1 i o_2 w punkcie K mają punkt wspólny T* (rysunek 5). *Wtedy punkty L, M i T są współliniowe.*

Ten punkt T nazywamy środkiem potęgowym okręgów o_1, o_2 i o_3.

Dowód powyższego twierdzenia odłożymy na później. Teraz pokażemy, jak można rozwiązać nasze zadanie konstrukcyjne, wykorzystując to twierdzenie.

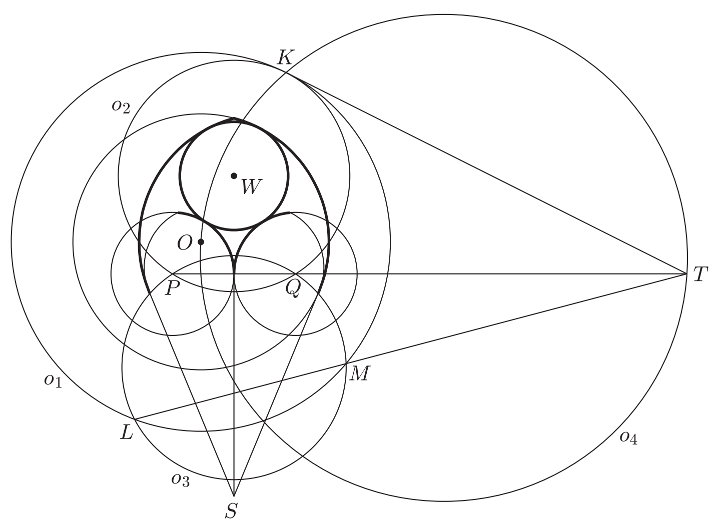


Rys. 4



Rys. 5

Zaczynamy od narysowania okręgu o_1 o środku O i promieniu $R+r$. Przypuśćmy, że został już skonstruowany okrąg o_2 przechodzący przez punkty P i Q i styczny wewnętrznie do okręgu o_1. Niech K będzie punktem styczności. Teraz rysujemy dowolny okrąg o_3 przechodzący przez punkty P i Q i przecinający okrąg o_1 w punktach L i M. Niech T będzie punktem przecięcia prostych PQ i LM. Z powyższego twierdzenia wynika, że wspólna styczna do okręgów o_1 i o_2 przechodzi przez punkt T. To pokazuje, w jaki sposób możemy znaleźć punkt styczności K. Wystarczy bowiem z punktu T poprowadzić teraz styczną do okręgu o_1. Tę styczną konstruujemy bez trudności: punkt K jest jednym z punktów przecięcia okręgu o_1 i okręgu o_4 o średnicy OT. Po znalezieniu punktu K dokończenie konstrukcji jest już łatwe. Okrąg o_2 jest bowiem okręgiem opisanym na trójkącie PQK. Jego środkiem jest zaznaczony na rysunku punkt W. Ten punkt W jest też środkiem szukanego okręgu; promień tego okręgu jest o r krótszy od promienia okręgu o_2, czyli jest równy np. $WP-r$. Najważniejsze szczegóły całej konstrukcji są pokazane na rysunku 6.



Rys. 6

Szukany okrąg i łuki ostrołuków, do których jest on styczny, zostały na rysunku 6 narysowane grubszą linią.

Pozostaje do udowodnienia nasze twierdzenie. Temu dowodowi poświęcimy następny artykuł.

Małą Deltę przygotował Wojciech GUZICKI