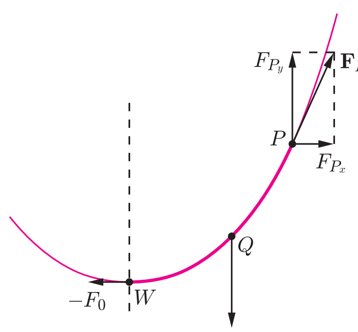
# Kształt wiszącego łańcucha

*Marek KORDOS*

Powstanie analizy matematycznej w XVII wieku wiązało się z wprowadzeniem do matematyki nieskończoności, a w szczególności z badaniem zmienności. Za wzorzec służyły zależności wzięte z mechaniki. Zależność między drogą, prędkością i przyspieszeniem stała się wzorcem rachunku różniczkowego i całkowego. Kluczowe stały się badania nad różnego rodzaju krzywymi powstającymi jako rozwiązania naturalnych problemów mechanicznych, jak tautochrona (np. *Delta* 2/2006), brachistochrona (np. *Delta* 7/2007), krzywa łańcuchowa, traktrysa.

W tym tekście opowiem o przedziwnych zależnościach, jakie wywodzą się z badania krzywej łańcuchowej. Przy okazji będzie mowa o prostych faktach z klasycznej geometrii różniczkowej, czyli teorii opisującej obecność analizy matematycznej w geometrii.

## Kształt łańcucha, czyli krzywa łańcuchowa




Rys. 1

Wektorem stycznym do krzywej łańcuchowej jest naprężenie $\mathbf{F}$ realnego (ale idealnego) łańcucha. Przedstawmy go za pomocą jego składowej poziomej i pionowej: $\mathbf{F}_P = (F_{P_x}, F_{P_y})$.

W najniższym punkcie $W$ (*wierzchołku* krzywej) składowa pionowa jest zerowa i $\mathbf{F}_W = (-F_0, 0)$. Wyobraźmy sobie, że chwytamy łańcuch w wierzchołku oraz w dowolnym innym punkcie $P$ i zostawiamy tylko fragment między $W$ i $P$ o długości $s$. Aby łańcuch nie zmienił kształtu (i nie poruszał się), składowa pozioma w punkcie $P$ musi równoważyć tę w punkcie $W$, czyli dla dowolnego punktu $P$ mamy $F_{P_x} = F_0$. Natomiast składowa pionowa w punkcie $P$ musi zrównoważyć ciężar tego fragmentu łańcucha: $Q = \rho \cdot s = F_{P_y}$, gdzie $\rho$ to ciężar łańcucha na jednostkę długości. Dla wygody oznaczmy jeszcze $a = F_0/\rho$. Mamy wobec tego $\mathbf{F}_P = (a \cdot \rho,\, s \cdot \rho)$, a tym samym $F_{P_y}/F_{P_x} = s/a$.

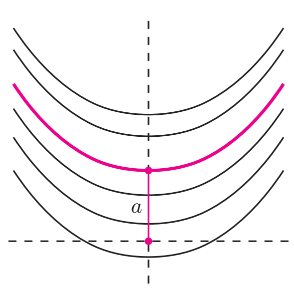
Jaki to wyznacza kształt?

*Ogólniej: jak opisać krzywą? Najzręczniej potraktować ją jako trajektorię ruchu. Wygodnie wtedy jest jako parametrem posłużyć się nie czasem, lecz przebywaną drogą $s$ – czyli jedziemy po krzywej samochodem ze stałą szybkością (tutaj trasa będzie płaska, jak na Great Salt Lake Desert, ale na ogół tak być nie musi). Jeśli tę trajektorię opisywać będą współrzędne $(x(s), y(s))$, to prędkość (czyli zmiany położenia) opisywać będzie $\mathbf{V} = (x'(s), y'(s))$ – jest to wektor styczny do trajektorii. Zysk z naszego wyboru parametru jest taki, że*

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1,$$

*ponieważ szybkość jest stała.*

*Tak jest dla każdej krzywej.*




Rys. 2

Dla krzywej łańcuchowej mamy więc układ równań

$$\begin{cases} \dfrac{y'(s)}{x'(s)} = \dfrac{s}{a}, \\ (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1, \end{cases}$$

z którego wynika, że

$$\mathbf{V} = (x'(s),\, y'(s)) = \left(\frac{a}{\sqrt{s^2+a^2}},\, \frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}\right).$$

Operacja prowadząca od $f'$ do $f$ to całkowanie. Jego najprostszą formą jest zgadnięcie, jaka to funkcja może mieć taką właśnie pochodną, o jaką nam chodzi. Metoda ta zapewne wystarczy, by stwierdzić, że $y(s) = \sqrt{s^2+a^2} + \text{coś}$. Próby naszych praojców pokazały, że najwygodniej będzie przyjąć, iż to „coś" to zero – wybór ten nadaje sens użytej przez nas stałej $a$: teraz będzie to wysokość „wierzchołka" krzywej łańcuchowej nad osią $x$-ów.

Dla znalezienia $x(s)$ opisana wyżej metoda całkowania raczej zawodzi. Trzeba użyć metody numer 2: poszukać w tablicach całek nieoznaczonych w jakimś poradniku i wtedy (dobierając tutaj „coś" tak, aby było $x(0) = 0$) otrzymujemy, że krzywa łańcuchowa ma przedstawienie parametryczne

$$\left(a \ln \frac{s+\sqrt{s^2+a^2}}{a},\, \sqrt{s^2+a^2}\right)$$

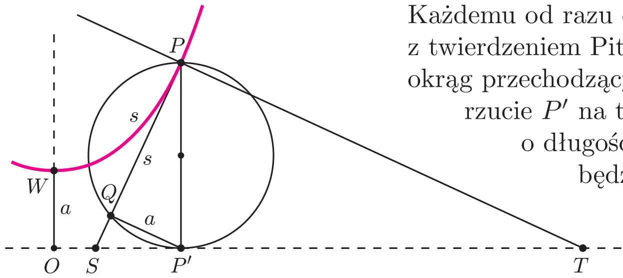
– straszna jest ta pierwsza współrzędna, ale napisałem ją dla porządku: nigdzie dalej nie będziemy z niej korzystali.

Czytelnik Erudyta wie, że krzywą łańcuchową można przedstawić też jako wykres funkcji

$$f(x) = \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}.$$

Z dalszego ciągu tekstu widać będzie, dlaczego wybrałem inną drogę.

## Konstrukcja stycznej, rektyfikacja i kwadratura krzywej łańcuchowej




Rys. 3

Każdemu od razu druga współrzędna punktów krzywej łańcuchowej kojarzy się z twierdzeniem Pitagorasa. Narysujmy to więc. Cóż się okazuje: jeśli narysujemy okrąg przechodzący przez jakiś punkt $P$ tej krzywej i styczny do osi $x$-ów w jego rzucie $P'$ na tę oś, a następnie narysujemy (w stronę zera) cięciwę $P'Q$ o długości $a$ (rys. 3), to (ponieważ $|PP'| = \sqrt{s^2+a^2}$) odcinek $PQ$ będzie miał długość $s$. Będzie więc tej samej długości co łuk $WP$ – dokonaliśmy rektyfikacji (czyli wyprostowania) krzywej łańcuchowej!

Zauważmy przy okazji, że prosta $PQ$ jest styczna do krzywej łańcuchowej w punkcie $P$. Obliczmy w tym celu kotangens kąta $QPP'$, jaki prosta $PQ$ tworzy z pionem, czyli tangens kąta, który tworzy z poziomem. Mamy

$$\operatorname{ctg} \sphericalangle QPP' = \frac{s}{a} = \frac{y'(u)}{x'(u)},$$

co jest geometrycznym opisem kierunku stycznej.

Na koniec (czego już nie obliczymy) odnotujmy, że pole trapezu krzywoliniowego $OWPP'$ jest równe $as$, czyli podwojonemu polu trójkąta $QPP'$. Rysując więc (cyrklem i linijką!) ten trójkąt, dokonaliśmy też kwadratury krzywej łańcuchowej.

Zatem, choć krzywej łańcuchowej cyrklem i linijką narysować się nie da, to – gdy ją już mamy – możemy cyrklem i linijką skonstruować styczną do niej, znaleźć odcinek równy jej długości i trójkąt równy ograniczanemu przez nią polu.

Dalej wykorzystamy jeszcze fakt, że odcinek stycznej od $P$ do przecięcia z osią $x$-ów to $\frac{s^2+a^2}{s}$ (czyli $|QS| = \frac{a^2}{s}$), a odcinek normalnej (czyli prostopadłej do stycznej) to $|PT| = \frac{s^2+a^2}{a}$, co otrzymuje się bezpośrednio z twierdzenia Pitagorasa.

## Katenoida

Jest to powierzchnia powstająca przez obracanie krzywej łańcuchowej wokół osi $x$-ów (po łacinie *catena* to łańcuch). Aby poznać jej najistotniejsze własności, zbadajmy krzywiznę krzywej łańcuchowej.

*Powróćmy do samochodu: jeśli jedzie on po płaszczyźnie ze stałą szybkością, to na zakrętach rzuca nas na prawe lub lewe drzwiczki* (*bardziej naukowo: przyspieszenie jest prostopadłe do prędkości*). *Wielkość tego przyspieszenia w geometrii nazywa się* krzywizną *i często oznacza ją literą* $\kappa$ (kappa).

Obliczmy krzywiznę krzywej łańcuchowej, a więc najpierw pochodną $\mathbf{V}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{V}' &= \left(\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}\cdot(a,\, s)\right)' = \left(\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}\right)'\cdot(a,\, s) + \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}\cdot(0,\, 1) = \\ &= \frac{-s}{(\sqrt{s^2+a^2})^3}\cdot(a,\, s) + \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}\cdot(0,\, 1) = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{s^2+a^2})^3}\cdot(-sa,\ -s^2+(s^2+a^2)) = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{s^2+a^2})^3}\cdot(-sa,\, a^2) = \frac{a}{(\sqrt{s^2+a^2})^3}\cdot(-s,\, a),\end{aligned}$$

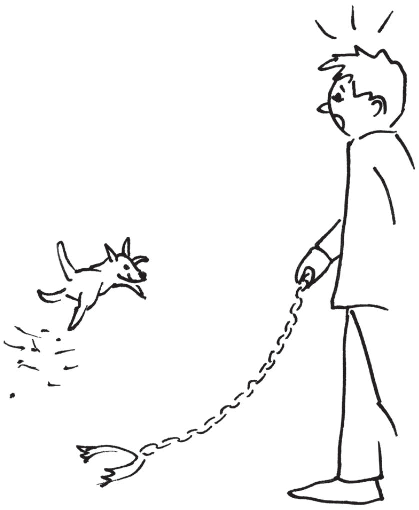
stąd

$$|\mathbf{V}'| = \frac{a}{s^2+a^2}$$

i taka jest krzywizna (przyspieszenie). To, co wykorzystamy dalej, to fakt, że jest to odwrotność długości odcinka normalnej.

*Bez większego trudu każdy może obliczyć, że krzywizna okręgu to odwrotność jego promienia. To spostrzeżenie pozwala na wprowadzenie pojęcia środka krzywizny oraz promienia krzywizny krzywej w danym punkcie $P$. Mianowicie* *na normalnej odkładamy odwrotność krzywizny (czyli $r = \frac{1}{\kappa}$) po tej stronie, z której krzywa wygląda jak brzeg figury wypukłej – otrzymany punkt to* środek krzywizny. *Okrąg o środku w tym punkcie i promieniu $r$ najlepiej przybliża krzywą w otoczeniu punktu $P$. Wyróżniając jedną ze stron, na jakie krzywa dzieli płaszczyznę, będziemy mówili o krzywiźnie dodatniej i ujemnej (sinusoida, na przykład, będzie zmieniała cyklicznie znak krzywizny – prawda?).*

Tu więc okazało się, że środkiem krzywizny jest punkt symetryczny do $T$ względem $P$ (nie ma go na rysunku 3), promieniem krzywizny zaś jest $|PT|$. To spostrzeżenie pozwoli nam na wykazanie, że katenoida jest powierzchnią minimalną.

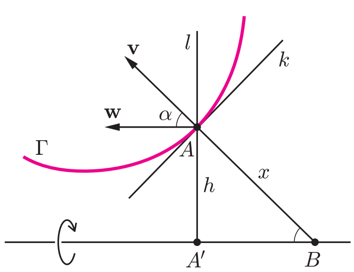


*Aby objaśnić to pojęcie, musimy przez chwilę zająć się powierzchniami ogólnie. Będziemy mówili o powierzchniach gładkich (co oznaczać będzie, że wykonywane przez nas manipulacje – np. znajdowanie płaszczyzny stycznej w jakimś punkcie – będą się udawały). Przecinajmy powierzchnię wszystkimi płaszczyznami przechodzącymi przez dany punkt i zawierającymi prostą prostopadłą do płaszczyzny stycznej w tym punkcie – takie przekroje nazywają się* normalne. *Ich krzywizna (jeśli nie jest w każdym kierunku taka sama) przyjmuje swoją wartość najmniejszą i największą tylko raz; ciekawe, że kierunki, w których przyjmowane są ekstremalne wartości, są prostopadłe. Wartości ekstremalne oznacza się zazwyczaj $\kappa_1$ i $\kappa_2$, a nie np. $\kappa_{\max}$ i $\kappa_{\min}$, bo to, która jest jaka, zależy przecież od obranej przez nas orientacji. Ważne są jednak wielkości*

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \quad \text{i} \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2},$$

*zwane odpowiednio krzywizną Gaussa i krzywizną średnią. Ta pierwsza gra wielką rolę w geometrii i jej zastosowaniach, bo nie zmienia się podczas żadnego wyginania powierzchni niezmieniającego długości leżących na niej krzywych, a nazwę zawdzięcza temu, kto wpadł na jej pomysł i wykazał, jak wiele od niej zależy. Natomiast okazało się, że powierzchnie, dla których ta druga jest równa zeru, to powierzchnie minimalne. Termin ten oznacza, że jeśli na tej powierzchni leży jakaś (niekoniecznie płaska) krzywa, to wykonując jej kopię z drutu i rozpinając na niej membranę o minimalnym polu powierzchni (np. błonę mydlaną), otrzymamy właśnie powierzchnię, z której ta krzywa była wyjęta.*

*Pozostając jeszcze na chwilę wśród „dowolnych" krzywych, zajmijmy się problemem, jak wyglądają krzywe o ekstremalnych krzywiznach na powierzchni powstałej przez obrót krzywej wokół osi $x$-ów (aby nie komplikować – niech krzywa ta będzie – jak krzywa łańcuchowa – „wypięta" w stronę tej osi). Wówczas jedną z krzywizn ekstremalnych będzie krzywizna obracanej krzywej – oznaczmy ją przez $\kappa_1$ i przyjmijmy dla zwrócenia uwagi, że jest ujemna. Od razu widać, że druga ekstremalna krzywizna będzie odmiennego znaku – ale która z krzywizn skierowanych w stronę osi $x$-ów będzie największa? Aby ten problem rozstrzygnąć, dobrze jest skorzystać z twierdzenie Meusniera, które mówi, jak zależy krzywizna $\kappa$ dowolnej krzywej płaskiej $\Gamma$ od krzywizny $\kappa_N$ przekroju normalnego mającego tę samą prostą styczną; otóż $\kappa_N = \kappa \cdot \sin\alpha$, gdzie $\alpha$ to kąt między płaszczyzną, w której leży $\Gamma$ i płaszczyzną styczną do powierzchni. Oznaczając przez $h$ odległość punktu krzywej od osi obrotu (rys. 4), mamy dla przekroju przez punkt $A$, prostopadłego do osi obrotu, $\kappa = \dfrac{1}{h}$. Ponieważ $h = x\sin\alpha$, więc $\dfrac{1}{h}\sin\alpha = \dfrac{1}{x}$. Z drugiej strony druga krzywizna ekstremalna jest w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny, w której leży obracana krzywa, czyli w płaszczyźnie zawierającej normalną. Zestawiając te dwa spostrzeżenia, stwierdzamy, że $\kappa_2$ to długość odcinka normalnej od krzywej do osi obrotu.*

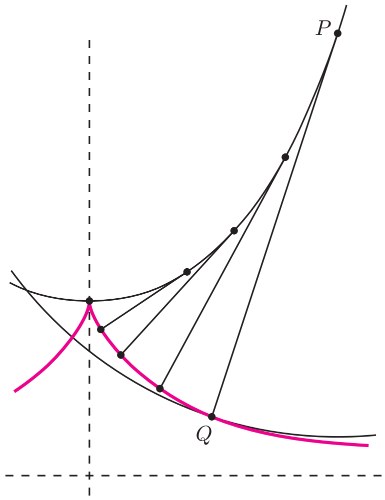



Rys. 4. Rozpatrzmy dwie płaszczyzny prostopadłe do płaszczyzny rysunku: jedną zawierającą prostą $k$ (to płaszczyzna styczna w punkcie $A$ do powstającej przez obracanie powierzchni) i drugą – zawierającą prostą $l$ (to płaszczyzna prostopadła do osi obrotu). Kąt między nimi to kąt między prostopadłymi do nich wektorami $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$.

W przypadku obracania krzywej łańcuchowej mamy więc $\kappa_1 = -\kappa_2$, skąd wynika, że krzywizna średnia jest równa zeru i katenoida rzeczywiście jest powierzchnią minimalną. Można ją sobie wyprodukować, zanurzając w roztworze mydła dwa dotykające się druciane pierścienie (najlepiej na rączkach), a następnie delikatnie rozsuwając je; utworzona między nimi powierzchnia będzie właśnie katenoidą.

## Rozwijamy (lub ciągniemy) sznurek, czyli tworzymy traktrysę

Jeśli wyobrazimy sobie, że wzdłuż krzywej łańcuchowej jest rozciągnięty sznurek kończący się w jej wierzchołku (przytrzymywanym przez nas) ciężarkiem, który w pewnym momencie puszczamy, trajektoria ciężarka wyznaczy nam krzywą o nazwie *traktrysa* (rys. 5).

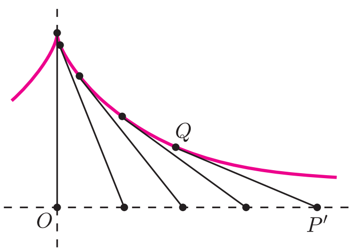



Rys. 5

*Rozwijanie napiętego sznurka z krzywej to pomysł prowadzący do pojęcia* ewolwenty *doprecyzowanego w geometrii różniczkowej. Każda krzywa ma wiele ewolwent, bo sznurek może mieć wolny koniec (ten z ciężarkiem) w różnych jej miejscach. Jeśli mamy ewolwentę jakiejś krzywej, to krzywa, z której powstała, jest zbiorem jej środków krzywizny – nazywamy ją jej ewolutą. Wszystkie ewolwenty danej krzywej mają tę samą ewolutę – ją właśnie.*

*To, że ewoluta składa się ze środków krzywizny swojej ewolwenty, staje się bezpośrednio widoczne, gdy zatrzymamy w pewnym momencie rozwijanie sznurka (np. na naszym obrazku w punkcie $P$). Wówczas huśtający się ciężarek będzie się kołysał po okręgu dobrze pasującym do ewolwenty (na naszym obrazku będzie to okrąg o środku $P$ i promieniu $PQ$).*

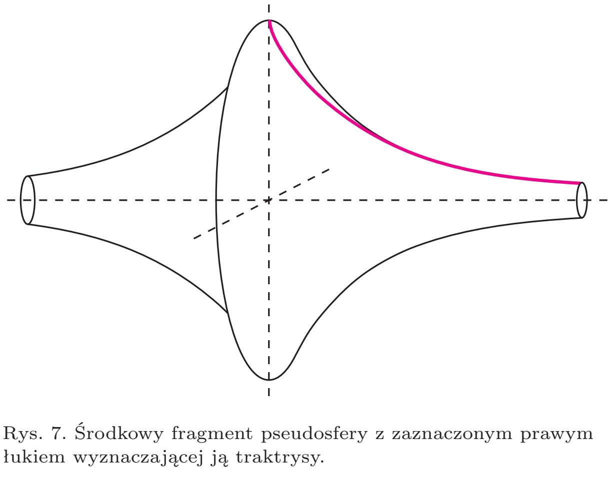
Widać to wszystko (i jeszcze więcej) także na rysunku 3. Oczywiście, długość odcinka $PQ$ rośnie w miarę rozwijania się sznurka. Ale widzimy też, że odległość $QP'$ pozostaje stała (równa $a$). Pozwala to na inną definicję traktrysy wykorzystującą sznurek: jeśli w punkcie $W$ umieścimy kaczuszkę na sznurku trzymanym przez dziecko w punkcie $O$ i dziecko to będzie wędrowało wzdłuż osi $x$-ów, kaczuszka poruszać się będzie właśnie po traktrysie (rys. 6). To podejście pozwala za traktrysę uważać raczej krzywą „podwojoną" przez odbicie symetryczne względem osi $y$-ów. Przecież dziecko może po osi $x$-ów powędrować zarówno w prawo, jak i w lewo.




Rys. 6. Gdy ktoś nie lubi opowiadań o kaczuszce, może traktrysę opisać jako krzywą, której odcinek stycznej do osi $x$-ów jest stałej długości.

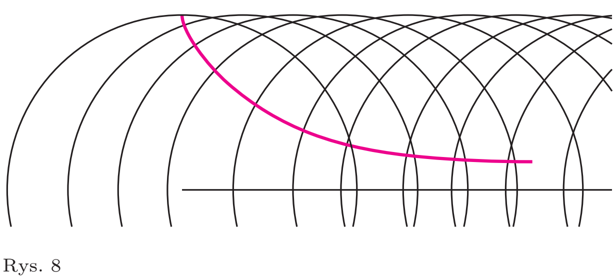
Główną zaletą traktrysy dla matematyków jest to, że jej obracanie wokół osi $x$-ów daje powierzchnię o stałej krzywiźnie Gaussa. Zastosujmy bowiem do niej (przydługie) uwagi o powierzchniach obrotowych z poprzedniej strony. Stwierdzamy wtedy (znów rysunek 3) nie tylko, że krzywizna traktrysy w punkcie $Q$ jest równa $-\dfrac{1}{s}$, ale też, że druga krzywizna ekstremalna powstałej powierzchni to odwrotność długości odcinka $QS$, czyli $\dfrac{s}{a^2}$, a więc

$$K = -\frac{1}{a^2}.$$



Rys. 7. Środkowy fragment pseudosfery z zaznaczonym prawym łukiem wyznaczającej ją traktrysy.

Dlaczego to takie ważne? Bo w przestrzeni trójwymiarowej są tylko cztery powierzchnie o stałej krzywiźnie Gaussa: dwie mają krzywiznę zero – to płaszczyzna i (niegraniczona) powierzchnia walca, jedna ma stałą krzywiznę dodatnią (każdy łatwo stwierdzi, że to sfera, czyli powierzchnia kuli) i jedna, właśnie otrzymana, ma stałą krzywiznę ujemną. Z tego względu powierzchnię powstałą przez obrót traktrysy wokół jej asymptoty nazywamy pseudosferą (rys. 7). Co ciekawe: mimo że pseudosfera jest nieograniczona, to pole jej powierzchni jest równe $4\pi a^2$, czyli wyraża się takim samym wzorem, jak dla sfery. Głębszą konsekwencją stałej krzywizny Gaussa jest możliwość zbudowania jednorodnej (w każdym punkcie takiej samej) geometrii, ale to już inna historia.



Rys. 8

Opowieść tę można by ciągnąć dalej, dla przykładu na rysunku 8 podany jest jeszcze inny sposób uzyskania traktrysy: jest to krzywa przecinająca pod kątem prostym każdy z okręgów o środkach leżących na prostej – proszę to sprawdzić (jaki mają promień?).

O traktrysie i pseudosferze pisaliśmy też w *Delcie* 6(385)/2006.