Jesienne wielokąty

Joanna JASZUŃSKA

Oto dziesięć zadań na długie jesienne wieczory.

1. Każdy wierzchołek jedenastokąta pomalowano jednym z czterech kolorów. Udowodnij, że można wybrać pięć kolejnych wierzchołków, pomalowanych co najwyżej trzema kolorami.

2. Wykaż, że w dwunastokącie foremnym $A_1A_2\ldots A_{12}$ przekątne A_1A_6, A_2A_9 i A_3A_{11} przecinają się w jednym punkcie.

3. Udowodnij, że środkowe dowolnego trójkąta dzielą go na sześć trójkątów o równych polach.

4. Wykaż, że środki boków dowolnego czworokąta tworzą równoległobok.

5. Przekątne AC i BD pięciokąta foremnego $ABCDE$ przecinają się w punkcie P. Oblicz CP/AP.

6. Sześciokąt wypukły ma wszystkie kąty po $120°$. Czy musi być foremny?

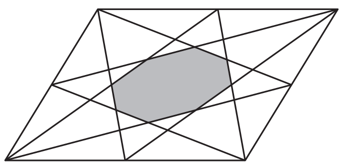
7. Wykaż, że w siedmiokącie foremnym $S = ABCDEFG$ zachodzi równość

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

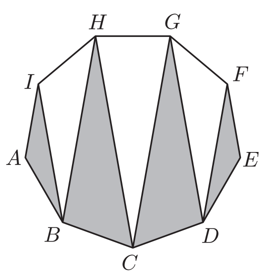
8. W równoległoboku o polu 1 poprowadzono wszystkie odcinki łączące wierzchołki ze środkami boków. Wyznacz pole szarego ośmiokąta (rys. 1).

9. Dziewięciokąt z rysunku 2 jest foremny. Która część ma większe pole, biała czy szara?

10. W każdym wierzchołku dziesięciokąta foremnego rośnie drzewo. Początkowo na każdym drzewie siedzi małpa. Co minutę pewne dwie małpy przeskakują, każda na któreś z dwóch sąsiednich drzew. Czy wszystkie małpy mogą znaleźć się jednocześnie na jednym drzewie?



Rys. 1



Rys. 2

Rozwiązania i wskazówki

1. Którymś kolorem pomalowano najwyżej dwa wierzchołki (bo $3 \cdot 4 > 11$). Jeśli zero lub jeden, to nie ma problemu. Jeśli dwa, to któraś z dwóch łączących je łamanych zawiera co najmniej pięć z pozostałych dziewięciu wierzchołków. □

2. Są to wysokości w $\triangle A_2A_6A_{11}$ (inne rozwiązanie: dwusieczne w $\triangle A_1A_3A_9$). □

3. Środkowe dzielą boki na połowy i przecinają się w stosunku $2:1$. Stąd każdy z sześciu trójkątów ma jeden bok będący połową odpowiedniego boku całego trójkąta T i wysokość opuszczoną na ten bok trzykrotnie krótszą od odpowiedniej wysokości T. Zatem pole każdego z nich to $1/6$ pola T. □

4. Sprawdź, że odcinek łączący środki boków AB i BC danego czworokąta jest równoległy do przekątnej AC. □

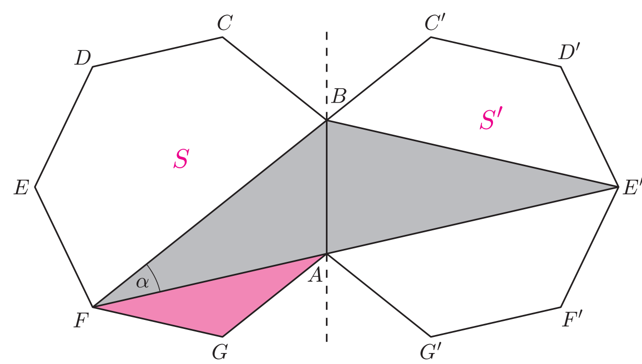
5. Wykaż kolejno, że $AP = PD = DE = CD$, że $\triangle ACD \sim \triangle DPC$ i że

$$\frac{CP}{AP} = \frac{AP}{AC} = \frac{AP}{AP+PC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \ \square$$

Punkt P wyznacza tak zwany *złoty podział* odcinka AC.

6. Nie. Może nawet mieć każdy bok innej długości. □

7. Kąt $\alpha = \sphericalangle AFB$ jest wpisany w okrąg opisany na S, oparty na krótszym z łuków AB, więc $\alpha = 180°/7$. Stąd $\sphericalangle FAB = 4\alpha$. Niech $S' = ABC'D'E'F'G'$ będzie obrazem S w symetrii względem prostej AB (rys. 3). Wtedy $\sphericalangle BAE' = 3\alpha$, więc $\sphericalangle FAE' = \sphericalangle FAB + \sphericalangle BAE' = 4\alpha + 3\alpha = 7\alpha = 180°$. Stąd punkty F, A, E' są współliniowe. Ponieważ S i S' są foremne i przystające, zachodzą warunki: $BF \parallel GA$, $BE' \parallel AE \parallel GF$ oraz $BF = BE'$.



Rys. 3

Uzyskujemy zatem $\triangle BFE' \sim \triangle GAF$. Wobec tego

$$\frac{BF}{GA} = \frac{FE'}{AF} = \frac{AE'+AF}{AF} = \frac{AE'}{AF} + 1.$$

Skoro $BF = AD$, $GA = AB$, $AE' = AD$ i $AF = AC$, dostajemy

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AC} + 1, \quad \text{a stąd} \quad \frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}. \ \square$$

8. Dorysuj przekątne równoległoboku, połącz wszystkie środki boków i wykorzystaj zadanie 3. Wynik: $1/6$. □

9. Szara. Dorysuj przekątne AH, BG, CF i znajdź sześć par trójkątów przystających różnych barw i jeszcze jeden szary. □

10. Nie. Niech co drugie drzewo będzie palmą. Początkowo siedzi na nich łącznie pięć małp. Liczba małp siedzących na palmach nie zmienia parzystości, więc nigdy nie będzie równa 0 ani 10. □