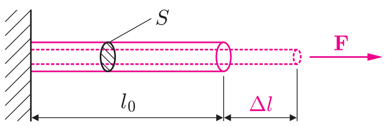
Wyznaczamy moduł Younga

Stanisław BEDNAREK

Pod działaniem sił zewnętrznych wszystkie ciała ulegają odkształceniom. Jednym z rodzajów odkształceń jest wydłużenie, czyli zwiększenie długości ciała (rys. 1). Wielkość tego wydłużenia, Δl, zależy od wartości działającej siły F, pola przekroju poprzecznego S ciała, jego długości początkowej l_0 oraz właściwości sprężystych. Właściwości te charakteryzuje moduł Younga oznaczany literą E. Przeprowadzone doświadczenia wykazały, że wydłużenie ciała opisuje prawo Hooke'a, które wyraża się następującym wzorem:



Rys. 1. Wydłużenie pręta Δl spowodowane przez siłę $\mathbf{F}$; l_0 – długość początkowa, S – przekrój poprzeczny.

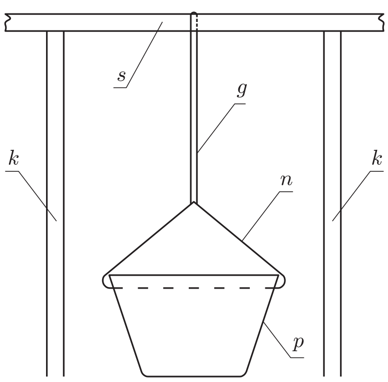
$$\Delta l = \frac{Fl_0}{ES}. \tag{1}$$

Przekształcając wzór (1) do postaci

$$E = \frac{(F/S)}{(\Delta l/l_0)}, \tag{2}$$

można łatwo zauważyć, że moduł Younga równy jest stosunkowi naprężenia, mierzonego stosunkiem siły F do pola przekroju poprzecznego S, do spowodowanego tym naprężeniem wydłużenia względnego $\Delta l/l_0$. Nasze dzisiejsze zadanie będzie polegało na doświadczalnym wyznaczeniu modułu Younga.

W tym celu potrzebne będą: szeroka gumka aptekarska, tzw. recepturka, duży (ok. 0,5 l pojemności) plastikowy kubek od napojów lub od surówki, igła, mocna nić, linijka z podziałką milimetrową, naczynie z wodą, duża szklanka lub inne naczynie w kształcie walca oraz statyw z poprzeczką. Zamiast statywu można także użyć długiego kija, np. od szczotki, położonego na dwóch krzesłach.



Rys. 2. Budowa układu doświadczalnego; k – oparcia krzeseł, s – kij od szczotki, g – gumka aptekarska, n – nić, p – plastikowy kubek.

Gumkę aptekarską nakładamy na poprzeczkę statywu (rys. 2). Za pomocą igły wykonujemy w górnej części kubka dwa otworki i przewlekamy przez nie nić, tak żeby przechodziła wzdłuż średnicy kubka. Odcinamy kawałek nici o długości około 20 cm i wolne jego końce przekładamy przez gumkę, a następnie zawiązujemy supeł. W ten sposób zawieszamy kubek na gumce aptekarskiej za pomocą nici. Gumka powinna wyprostować się pod ciężarem kubka.

Korzystając z linijki, mierzymy długość l_0 podwójnie złożonej, nieobciążonej gumki oraz jej grubość i szerokość. Odczytane wyniki pomiarów wyrażone są w milimetrach, ale wygodnie będzie przeliczyć je na metry. Przekrój poprzeczny gumki ma kształt prostokąta o bokach a, b. Mnożąc te długości boków i podwajając uzyskany wynik, otrzymujemy przekrój poprzeczny podwójnie złożonej gumki $S = 2ab$, występujący we wzorze (1).

Napełnienie wodą kubka zawieszonego na nici wywrze na gumkę siłę rozciągającą. Po wlaniu wody do kubka mierzymy długość l rozciągniętej gumki. Zmiana długości gumki, Δl we wzorze (1), jest, oczywiście, równa $l - l_0$. Ponieważ ciężar wody wielokrotnie przewyższa ciężar kubka, ten ostatni możemy pominąć w naszych rozważaniach. Siła F, rozciągająca gumkę w naszym układzie doświadczalnym, równa jest ciężarowi wody zawartej w kubku i wyraża się wzorem

$$F = V\varrho \mathrm{g}, \tag{3}$$

w którym ϱ oznacza gęstość wody ($\varrho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$), natomiast g jest przyspieszeniem ziemskim ($\mathrm{g} = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$). Objętość wody V możemy zmierzyć, przelewając ją z kubka do szklanki, mierząc linijką średnicę d szklanki oraz wysokość h słupa wody w szklance i korzystając ze wzoru

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4}. \tag{4}$$

Jeżeli szklanka jest mała, możemy wlewać do niej wodę w kilku porcjach i zsumować uzyskane objętości poszczególnych porcji. Wysokość słupa wody w szklance wyznaczamy, zanurzając w niej pionowo linijkę. Na wielu linijkach podziałka milimetrowa nie zaczyna się od jej brzegu – żeby to uwzględnić, kładziemy linijkę na kartce papieru i rysujemy odcinek o długości równej odległości początku skali od początku linijki, a następnie mierzymy długość tego odcinka w milimetrach. Zwykle długość ta wynosi około 3–4 mm i dodajemy ją do głębokości wody w kubku zmierzonej przez zanurzenie linijki. Opisany wyżej pomiar objętości wody upraszcza się znacznie, jeśli mamy dostęp do naczynia miarowego z podziałką, w które często wyposażona jest domowa kuchnia.

Teraz możemy już obliczać moduł Younga E. W tym celu wzór (1) przekształcamy do postaci

$$E = \frac{Fl_0}{S(l - l_0)}. \tag{5}$$

Do otrzymanego wyrażenia (5) podstawiamy wzór (3), a następnie wzór (4). Otrzymujemy wówczas końcowy wzór

$$E = \frac{\pi g \varrho d^2 h l_0}{8ab(l - l_0)}, \tag{6}$$

który pozwoli nam obliczyć moduł Younga E po podstawieniu wyników przeprowadzonych pomiarów.

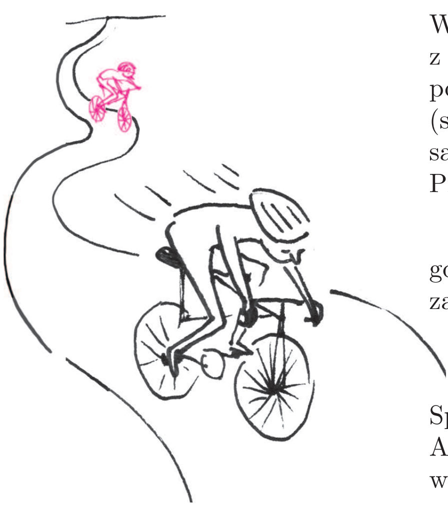
Wartość obliczoną ze wzoru (6) porównujemy z wartością modułu Younga dla gumy podaną w tablicach fizycznych. Wartość tablicowa wynosi $5 \cdot 10^6$ N/m^2. Wyznaczona przez nas wartość może różnić się dość znacznie od wartości tablicowej. Przyczyną tej różnicy mogą być zarówno niedokładności wykonanych przez nas pomiarów, jak i fakt istnienia wielu rodzajów gumy różniących się właściwościami sprężystymi.

Na zakończenie problem do samodzielnego rozwiązania. Należy ocenić, jak duży błąd wyznaczenia modułu Younga spowodowany jest niedokładnościami poszczególnych pomiarów. Będziemy mogli wówczas orzec, czy mamy do czynienia z tym samym rodzajem gumy, który uwzględniono w tablicach.

Wolniejszy wyprzedza

W wielu dyscyplinach sportu chodzi o to, by jak najszybciej dotrzeć do mety. By wygrać, trzeba dotrzeć do mety przed rywalami, co niekoniecznie oznacza ustanowienie nowego rekordu świata. Wydaje się więc oczywiste, że ten, kto ma większą prędkość, pierwszy ukończy bieg i wygra. Ale nie zawsze tak jest.

Właściwie każda bieżnia, tor łyżwiarski, żużlowy lub Formuły 1, a nawet ulica, na której rozgrywa się wyścig, ma zakręty. No właśnie, jak to jest z wyprzedzaniem na zakręcie?



Wyobraźmy sobie, że mamy dwóch zawodników ścigających się na torze z zakrętami. Każdy z nich ma takie same umiejętności techniczne, tzn. może pokonywać łuki przy takiej samej wartości przyspieszenia odśrodkowego (sytuacja taka dobrze odpowiada wyścigom F1). Obaj wchodzą w zakręt w tym samym momencie. Jeden z nich jest bliżej środka łuku niż Drugi ($R_J < R_D$). Przyspieszenie odśrodkowe ma tę samą wartość, więc:

$$\omega_J^2 R_J = \omega_D^2 R_D,$$

gdzie ω_J to prędkość kątowa Jednego, a ω_D – Drugiego. Czytelnik Sprawny zaraz przekształci wzór i otrzyma:

$$\frac{\omega_J}{\omega_D} = \sqrt{\frac{R_D}{R_J}}.$$

Sprawa jest jasna – Jeden ma większą prędkość kątową, więc wyprzedza Drugiego. A jakie są ich prędkości liniowe? Czytelnik Sprawny musi sobie przypomnieć wzór wiążący prędkość liniową (V) z kątową i w mig dojdzie do wniosku, że:

$$\frac{V_J}{V_D} = \sqrt{\frac{R_J}{R_D}}.$$

Coś się odwrócił ten ułamek. Widzimy teraz, że wolniejszy wyprzedza!

Radosław POLESKI